Math. A
215
8r

Die

Elastizitätsverhältnisse

der

Röhren,

welche einem hydrostatischen Drucke ausgesetzt sind,

insbesondere

die Bestimmung der Wanddicke derselben.

Eine

für das Ingenieurwesen wichtige Erweiterung

der

Biegungstheorie.

Von

Dr. Hermann Scheffler,

Baurath.

Mit einer Figurentafel.

Wiesbaden.

Kreidel und Niedner, Verlagshandlung.

1859.

Digitized by Google

4th a. 313d

Die

Elastizitätsverhältnisse

der

Röhren,

welche einem hydrostatischen Drucke ausgesetzt sind,

insbesondere

die Bestimmung der Wanddicke derselben.

Eine

für das Ingenieurwesen wichtige Erweiterung

der

Biegungstheorie.

Von

Dr. Hermann Scheffler,

Baurath.

(Besonders abgedruckt aus dem Organe für die Fortschritte des Eisenbahnwesens vom Jahre 1859.)

Bayerische Staatsbibliothek München

Wiesbaden.

Kreidel und Niedner, Verlagshandlung.

1859.

Digitized by Google

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Digitized by Google

1. Offene Röhren.

Ein Artikel vom Kapitain Blakely im Civil engineer and architect's journal, Februar 1859, über die Wandstärke von Röhren, welche einen starken inneren Druck auszuhalten haben, wie die Röhren von hydraulischen Pressen, Kanonen u. dergl., hebt zunächst die bekannte Thatsache hervor, dass die Vermehrung der Wanddicke einer hydraulischen Presse keineswegs im Stande ist, die Stärke des Rohres über ein gewisses Maß hinaus zu steigern. Alsdann erinnert derselbe an die überall mit Erstaunen aufgenommene Sprengung aller beim ersten Versuche des Stapellaufes des Leviathan angewandten hydraulischen Pressen, obgleich dieselben bei einer inneren Weite von 10 Zoll und einer Wanddicke von 7½ Zoll nur einen Druck von 5 Tons pro Quadratzoll (oder fast 800 Atmosphären) zu ertragen hatten.

Blakely bemerkt zugleich, dass die Ursache dieser Schwäche, unter welcher auch die Kanonen leiden, bis jetzt noch wenig bekannt sei, obgleich Professor Barlow den Gegenstand schon vor vielen Jahren erörtert habe.

Die letztere Behauptung, dass die Technik von den rationellen Formeln zur Bestimmung der Wanddicke von Röhren bis jetzt wenig Notiz genommen habe, ist allerdings richtig, und die oben angeführten Thatsachen reden laut genug, wie wichtig es ist, diesem Gegenstande in der Praxis des Ingenieurs eine größere Beachtung zuzuwenden.

Übrigens genügt es nicht, zur Berichtigung der anfänglich in den Lehrbüchern der angewandten Mechanik aufgestellten Formel einfach auf jenen Artikel von Blakely hinzuweisen. Denn die von ihm erläuterte Barlowsche Formel ist ebenfalls nicht richtig, und Dasselbe lässt sich von einer anderen in neuerer Zeit, namentlich bei der Berechnung der Blechstärken von Dampfkesseln gebrauchten Formel sagen. Es möchte daher nützlich sein, zunächst die Ungenauigkeit der eben bezeichneten und

Digitized by Google

der älteſten Formel darzuthun, und alsdann die den mechaniſchen Prinzipien entſprechende Formel zu entwickeln.

Zu dem Ende ſei

r_0, r_1 reſp. der innere und der äußere Radius der Röhre,

$b = r_1 - r_0$ die Wanddicke,

p_0, p_1 reſp. der von innen und der von außen gegen die Röhre angebrachte Druck pro Quadrateinheit,

s_0, s_1 reſp. die Spannung der ringförmigen Fiber des Materials der Röhren im inneren und im äußeren Umfange,

ϱ_0, ϱ_1 reſp. die Vergrößerung, welche der innere und der äußere Radius in Folge der Dehnung der Röhre erleidet,

r, p, s, ϱ reſp. der Radius, der Druck, die Spannung und die Vergrößerung des Radius für irgend eine konzentriſche Schale der Röhrenwand,

E der Elaſtizitätsmodel für das Material der Röhre pro Quadrateinheit,

f die abſolute Feſtigkeit dieſes Materials,

n der Sicherheitskoeffizient.

Wir betrachten hier nur den Fall, wo der Bruch in einem Längenſchnitte der Röhre erfolgen, wo dieſelbe alſo der Länge nach aufſpalten könnte, indem leicht nachzuweiſen iſt, daß dieſes Aufſpalten eher eintreten muß, als ein Abreißen der Röhre in einem auf der Are normal ſtehenden Querſchnitte, ſelbſt wenn ſie an den Enden verſchloſſen wäre.

Faſſen wir daher ein Stück der Röhre zwiſchen zwei normalen Querſchnitten ins Auge, deſſen Länge gleich einer Längeneinheit iſt, und beſtimmen wir die Kräfte, welche eine Ausdehnung des Materials, eventuell einen Bruch der beiderſeitigen Röhrenwände in einer durch die Röhrenare gelegten Ebene hervorzubringen ſtreben, und die Elaſtizitätskräfte, welche ſich dieſer Dehnung entgegenſetzen.

Die letzteren Elaſtizitätskräfte ſtehen normal auf der Bruchebene; die mit denſelben im Gleichgewichte befindlichen Dehnungskräfte ſind alſo die auf jener Ebene normal ſtehenden Komponenten der gegen den inneren und äußeren Umfang der Röhren wirkenden Preſſungen. Man findet bald, daß die Summe aller dieſer Komponenten für die inneren Preſſungen $= 2r_0p_0$, nämlich gleich dem normalen Drucke gegen die Durchſchnittsfläche des inneren Röhrenraumes iſt. Ebenſo iſt die Summe jener Komponenten für die äußeren Preſſungen $= 2r_1p_1$, mithin der Geſammtdruck der dehnenden Kräfte $= 2(r_0p_0 - r_1p_1)$.

Was nun die widerſtehenden Elaſtizitätskräfte betrifft; ſo nahm man früher ohne Weiteres an, die Spannung s ſei in allen Punkten der Röhrenwand gleich, alſo $= s_0$. Für dieſe Vorausſetzung iſt eine weitere Betrachtung der entſtehenden

Digitized by Google

Dehnung der Röhre ganz überflüssig: denn man hat sofort für die widerstehenden Elastizitätskräfte in den Durchschnittsflächen der beiderseitigen Röhrenwände den Werth $2(r_1 - r_0)s_0$, und da diese Kräfte den dehnenden Kräften gleich sein müssen,

$$(r_1 - r_0)\, s_0 = r_0\, p_0 - r_1\, p_1$$

Hieraus folgt für die Spannung in jedem Punkte der Röhrenwand

$$s_0 = \frac{r_0\, p_0 - r_1\, p_1}{r_1 - r_0} = \frac{r_0\,(p_0 - p_1)}{b} - p_1 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

und für die Wanddicke

$$b = \frac{r_0\,(p_0 - p_1)}{s_0 + p_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Für die Praxis, wo die Spannung s_0 der Sicherheit wegen nur den n ten Theil der absoluten Festigkeit des Materials in der auf einem Durchmesser normal stehenden Richtung erreichen soll, hat man $s_0 = \frac{1}{n} f$, also

$$b = \frac{r_0\,(p_0 - p_1)}{\frac{1}{n} f + p_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

zu setzen.

Dieses ist die älteste Formel für die Wanddicke, eine Formel, welche man auch jetzt noch in den meisten Lehrbüchern und zwar mit der unmotivirten Abkürzung, dass der äußere Druck $p_1 = o$ sei, vorfindet. Diese Formel ist übrigens nur dann anwendbar, wenn die Wandstärke b einen sehr kleinen Werth annimmt, weil nur in diesem Falle die Voraussetzung einer gleichmäßigen Vertheilung der Spannung über die ganze Dicke der Röhrenwand zulässig ist. Für dicke Röhrenwände, z. B. für hydraulische Pressen, hölzerne Wasserröhren unter bedeutendem Drucke, Kanonen u. dergl. ist sie völlig unbrauchbar.

Im Allgemeinen ist es also nöthig, die Formveränderung der aus einem elastischen Materiale bestehenden Röhre und die daraus entspringende Variation der Spannung s von Punkt zu Punkt der Wanddicke zu betrachten.

Wenn s als Funktion von r bekannt ist, wenn man also die Spannung kennt, welche in derjenigen konzentrischen Schale von unendlich geringer Dicke stattfindet, die ursprünglich den Radius r und die unendlich geringe Dicke dr besaß; so ist offenbar s dr die dieser Schale angehörige Elastizitätskraft. Wir heben ausdrücklich hervor, dass dieser Ausdruck auch dann noch gültig ist, wenn die ursprüngliche Dicke dr jener Schale in Folge der Dehnung der Röhre eine Veränderung erlitte (was in der That stattfindet, da jede Schalenwand komprimirt wird). Denn wenn ein Stab vom Querschnitte F im Stande ist, die Zugkraft S zu ertragen; so wird

Digitized by Google

er diese Eigenschaft beibehalten, selbst wenn er durch Seitenkräfte normal zu seiner Länge so komprimirt oder ausgedehnt würde, dass sein Querschnitt die Größe F' annähme. Wäre seine Spannung in der Längenrichtung in dem früheren Zustande pro Quadrateinheit = s, also S = Fs; so wird, wenn der frühere Querschnitt F in F' übergeht, auch die Spannung pro Flächeneinheit s in s' übergehen, so aber dass man immer S = Fs = F's' hat. In allen Fällen wird es aber zweckmäßig sein, die Spannung des Stabes in dem letzteren Zustande nicht durch die Größe s', welche sich auf den veränderten Querschnitt F' bezieht, sondern immer durch die Größe s zu messen, welche auf den ursprünglichen Querschnitt F, also den natürlichen Zustand des Stabes zu beziehen ist.

Wenn hiernach $s\,d\,r$ die Elastizitätskraft einer Schale von der ursprünglichen Dicke $d\,r$ ist; so hat man für die Elastizitätskräfte aller Schalen auf beiden Seiten $2\int_{r_0}^{r_1} s\,d\,r$, und da diese Größe der ausdehnenden Kraft $2\,(r_0\,p_0 - r_1\,p_1)$ gleich sein muss,

$$\int_{r_0}^{r_1} s\,d\,r = r_0\,p_0 - r_1\,p_1 \qquad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Es kommt jetzt darauf an, die Spannung s als Funktion des Radius r auszudrücken.

Wenn die Schale vom Radius r in Folge der Dehnung einen Radius $r + \varrho$ annimmt; so verlängert sich ihr Umfang um den Theil $\frac{\varrho}{r}$ seiner ursprünglichen Länge. Die hierdurch bedingte Elastizitätskraft oder die Spannung s ist also auch

$$s = \frac{\varrho}{r}\,E \qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Statt der obigen Formel (4) kann man also auch schreiben

$$E\int_{r_0}^{r_1} \frac{\varrho}{r}\,d\,r = r_0\,p_0 - r_1\,p_1 \qquad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

und wir hätten jetzt die Größe ϱ durch r auszudrücken.

Es liegt nahe, dass man zu diesem Zwecke die Voraussetzung macht, die Dicke der Röhrenwand und jeder elementaren Schale erleide bei der Dehnung der Röhre keine Veränderung, d. h. die inneren Kompressionskräfte, welche in der Richtung des Radius entstehen, bewirken nur so geringe Kompressionen, dass man dieselben vernachlässigen könne. Ich sage, es liegt nahe, diese Voraussetzung zu machen, weil dieselbe in der Theorie der Biegung, der Torsion und bei fast allen Untersuchungen über Elastizität, wo außer den Hauptspannungen auch noch Neben-

Digitized by Google

spannungen in anderen Richtungen entstehen, behuf praktischer Vereinfachung mit Fug und Recht gemacht wird, indem dadurch das Endresultat meistens nur wenig affizirt wird.

Der Einwurf, den Barlow gegen diese Hypothese der Unveränderlichkeit der Wanddicke macht, daß daraus eine Vermehrung der Masse der in der Röhrenwand enthaltenen Materie folgen würde, was unmöglich sei, ist völlig unbegründet. Denn aus jener Hypothese folgt durchaus keine Vermehrung der Masse, sondern nur des Volums: Vermehrung des Volums durch dehnende Kräfte ist aber nicht allein keine Absurdität, sondern eine physische Nothwendigkeit; es handelt sich nur darum, in welchem Maße eine solche Volumvermehrung stattfindet, und da tritt denn eben jene Hypothese mit der Annahme auf, daß die Volumvermehrung genau der Längenzunahme der konzentrischen Schalen entspreche, sodaß die Dicke der Röhrenwand ungeändert bleibe.

Diese Voraussetzung ist als vereinfachende Hypothese ebenso rationell, wie die Annahme, daß ein in seiner Längenrichtung gezogener Stab bei seiner Längenausdehnung seinen Querschnitt nicht verändere. Dieselbe wird auch bis zu einer gewissen Grenze der Wanddicke der Wirklichkeit mit hinreichendem Grade von Genauigkeit entsprechen. Bei zunehmender Dicke der Röhrenwand muß aber nothwendig endlich der Fall eintreten, daß die Kompression des Materials in der Richtung des Radius einen merklichen Einfluß auf den inneren Radius, also auf die Ausdehnung der innersten Schale oder die gefährlichste Spannung äußert. Denn wenn auch jene Kompression schwach ist; so wird sie doch, je dicker die Röhrenwand wird, diese Dicke umso mehr reduziren, wie eine Kraft, welche einen Stab von 10 Fuß Länge um den geringen Betrag von $^1/_{100}$ Fuß komprimirt, einen Stab von 1000 Fuß Länge um den bedeutenden Betrag von 1 Fuß komprimiren würde.

Ehe wir zur Berücksichtigung der hier wirklich obwaltenden Kompressionskräfte schreiten, wollen wir noch die obige Hypothese der unveränderlichen Wanddicke durchführen. Hiernach würde die Vermehrung ϱ des Radius r eine konstante Größe sein und man hätte nach Gleichung (5)

$$\varrho = \varrho_0 = \frac{r_0 s_0}{E}$$

also nach Gleichung (6)

$$r_0 s_0 \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{r} = r_0 p_0 - r_1 p_1$$

Hieraus folgt

$$r_0 s_0 \log \frac{r_1}{r_0} = r_0 p_0 - r_1 p_1$$

Digitized by Google

also für die Spannung im inneren Umfange der Röhre

$$s_0 = \frac{r_0 p_0 - r_1 p_1}{r_0 \log \frac{r_1}{r_0}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

$$= \frac{r_0 (p_0 - p_1) - b p_1}{r_0 \log \left(\frac{b}{r_0} + 1 \right)}$$

Wenn der äußere Druck $p_1 = 0$ oder wenn doch wenigstens das Produkt $b p_1$ so klein ist, daß es gegen $r_0 (p_0 - p_1)$ verschwindet; so kann man abgekürzt

$$s_0 = \frac{p_0 - p_1}{\log \left(\frac{b}{r_0} + 1 \right)} - p_1$$

setzen, woraus für die Wanddicke

$$b = r_0 \left(e^{\frac{p_0 - p_1}{s_0 + p_1}} - 1 \right) \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

oder zur praktischen Anwendung, wo $s_0 = \frac{1}{n} f$ sein muß,

$$b = r_0 \left(e^{\frac{p_0 - p_1}{\frac{1}{n} f + p_1}} - 1 \right) \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

folgt.

Da nach dieser Hypothese $s = \frac{\varrho}{r} E = \frac{\varrho_0}{r} E = \frac{r_0 s_0}{r}$ ist; so würde danach die Spannung von Punkt zu Punkt der Röhrenwand im umgekehrten Verhältnisse des Radius variiren.

Die vorstehende Formel (9) für die Wanddicke b liegt mit der nicht hinreichend motivirten Streichung des Gliedes p_1 im Nenner des Exponenten den gesetzlichen Bestimmungen über die Wanddicken der Dampfkessel verschiedener Staaten zu Grunde und ist zuerst von Brix aufgestellt worden. Da es sich in diesem Falle immer nur um kleine Wanddicken handelt; so liefert jene Formel zu diesem Zwecke zwar keine unpraktischen Resultate: da sich jedoch die genaue Formel als weit einfacher und zur Anwendung bequemer erweist; so liegt durchaus kein Motiv vor, sich der obigen Formel in diesem Ausnahmefalle ferner zu bedienen. Ohnehin würde für diesen Ausnahmefall, d. h. solange es sich um geringe Wanddicken handelt, die älteste und einfachste Formel (3) ebenso brauchbar sein, wie die letztere Formel (9).

Will man jetzt die Spannungen in der Röhrenwand mit möglichster Genauigkeit bestimmen; so darf die Formveränderung der Röhre nicht abermals an eine Hypothese geknüpft werden; es ist vielmehr die wirkliche Formveränderung, wie sie den Spannungen s in der Richtung des Umfanges einer jeden konzentrischen

Digitized by Google

Schale und den Pressungen p in der Richtung des Radius einer solchen Schale nach mechanischen Gesetzen zukommt, zu ermitteln.

Statt dessen bedient sich Barlow der Hypothese, dass der Querschnitt der Röhrenwand stets denselben Flächeninhalt beibehalte, dass also das Volum der Röhrenwand stets ungeändert bleibe. Einer solchen rein geometrischen Bedingung steht kein mechanisches Gesetz motivirend zur Seite. Das Volum der Röhrenwand ändert sich allerdings, freilich nicht so bedeutend, wie die Brixsche Formel voraussetzt, aber doch auch wiederum nicht so unbedeutend, wie Barlow annimmt. Die Wahrheit liegt zwischen beiden Annahmen, jedoch nicht in der Mitte, sondern, wie wir weiter unten zeigen werden, näher an der von Brix, als an der von Barlow, und es ist schon vorherzusehen, dass während die Brixsche Formel zu schwache Röhrenwände ergiebt, die Barlowsche zu starke ergeben wird.

Was nun zunächst die Barlowsche Hypothese betrifft; so verlangt dieselbe, dass

$$(r + \varrho)^2 - (r_0 + \varrho_0)^2 = r^2 - r_0^2$$

also

$$\varrho = \sqrt{r^2 + 2 r_0 \varrho_0 + \varrho_0^2} - r \quad . \quad . \quad 10)$$

sei.

Eine Substitution dieses Werthes von ϱ in Gleichung (6) giebt

$$E \int_{r_0}^{r_1} \left(\frac{1}{r} \sqrt{r^2 + 2 r_0 \varrho_0 + \varrho_0^2} - 1 \right) dr = r_0 p_0 - r_1 p_1$$

worin außerdem noch ϱ_0 nach Gleichung (5) durch $\frac{r_0 s_0}{E}$ ersetzt werden kann.

Die Integration des Ausdruckes auf der linken Seite hat zwar keine Schwierigkeit: da dieselbe jedoch eine unbequeme Formel erzeugt; so nimmt Barlow auf eine Abkürzung Bedacht, indem er in der Relation

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{2 r_0 + \varrho_0}{2 r + \varrho}$$

welche sich unmittelbar aus der aufgestellten Bedingungsgleichung ergiebt, ϱ_0 gegen $2 r_0$ und ϱ gegen $2 r$ verschwinden lässt, also

$$\varrho = \frac{r_0 \varrho_0}{r} = \frac{r_0^2 s_0}{r E}$$

setzt. Dieß giebt

$$r_0^2 s_0 \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{r^2} = r_0 p_0 - r_1 p_1$$

und nach gehöriger Integration

$$\frac{r_0 (r_1 - r_0) s_0}{r_1} = r_0 p_0 - r_1 p_1$$

$$s_0 = \frac{r_1 (r_0 p_0 - r_1 p_1)}{r_0 (r_1 - r_0)} \quad . \quad . \quad (11)$$

Digitized by Google

Nimmt man den äußeren Druck $p_1 = o$ an; so reduzirt sich diese Formel auf

$$s_o = \frac{r_1 p_o}{r_1 - r_o} = \frac{(r_o + b) p_o}{b} \quad . \quad . \quad (12)$$

und hieraus folgt

$$b = \frac{r_o p_o}{s_o - p_o} \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

und für die Praxis

$$b = \frac{r_o p_o}{\frac{1}{n} f - p_o} \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Aus der Formel (13) erkennt man, daß die Wanddicke b sehr bedeutend wächst, wenn sich der innere Druck p_o der in der inneren Wandfläche herrschenden Spannung s_o nähert und daß b für $p_o = s_o$ unendlich groß werden würde.

Da man nun der Spannung s_o in der inneren Wandfläche höchstens den Werth der absoluten Festigkeit f des Materials ertheilen kann; so folgt, daß wenn der innere Druck p_o den Betrag der absoluten Festigkeit erreicht, die Röhre jedenfalls gesprengt werden wird, wie groß auch ihre Wanddicke sei, daß also die absolute Festigkeit eine Grenze für die innere Pressung bildet, welcher man keine Röhre aussetzen darf.

Dieses Resultat beruht übrigens auf einer unstatthaften Hypothese, ferner auf einer Abkürzung der Formeln und endlich auf der Annahme, daß der äußere Druck $p_1 = o$ sei. Es ist daher von großer Wichtigkeit, die Wahrheit desselben durch genauere Untersuchung zu prüfen.

Zunächst bemerken wir, daß die Annahme $p_1 = o$ in der Wirklichkeit niemals erfüllt wird, indem der äußere Druck doch fast immer dem atmosphärischen gleich ist. Unter Berücksichtigung dieses äußeren Druckes p_1 ergiebt aber Gl. (11) eine von (13) sehr abweichende Formel, nämlich

$$b = \frac{r_o}{2p_1}\left[\sqrt{s_o^2 + p_o^2 - 2s_o(p_o - 2p_1)} - (s_o - p_o + 2p_1)\right] \; . \; (15)$$

Diese aus der Barlowschen Hypothese fließende genauere Formel liefert merkwürdiger Weise für $p_o = s_o$ keineswegs einen unendlich großen, sondern den endlichen Werth

$$b = r_o\left(\sqrt{\frac{p_o}{p_1}} - p_1\right)$$

Überhaupt erfordert jetzt kein noch so großer innerer Druck p_o eine unendliche Wanddicke. Die genauere Ausführung der Barlowschen Hypothese widerspricht also dem wichtigsten Resultate, welches aus der abgekürzten Formel gezogen war. Freilich entsteht noch die Frage, welchen Einfluß die andere Abkürzung, der zufolge $\varrho = \frac{r_o \varrho_o}{r}$ gesetzt war, auf das Resultat ausübt, und ob diese Ab-

Digitized by Google

kürzung, welche bei sehr großen Wanddicken ebenfalls ganz unzulässig ist, nicht etwa das soeben verworfene Ergebniss nicht wieder herstellt. Da indessen die vorstehende Diskussion ungenauer Formeln nur den Zweck hat, darauf aufmerksam zu machen, wie misslich zuweilen scheinbar unwesentliche Abkürzungen und anscheinend plausibele Hypothesen selbst für die gewöhnlichsten praktischen Bedürfnisse sind, und dieser Zweck durch die bisherige Darstellung genügend erreicht sein dürfte; so mag die weitere Untersuchung über den Erfolg der zuletzt erwähnten Abkürzung auf sich beruhen bleiben. Wir wenden uns sofort zu der sachgemäßeren Berücksichtigung der gegebenen Verhältnisse.

In einem Punkte, welchem ursprünglich der Radius r zukam, herrscht nach der Formveränderung der Druck p in der Richtung des Radius. Ein in der Richtung dieses Radius liegendes Fibernelement von der Länge d r wird also unter dem Drucke p pro Quadrateinheit komprimirt und in Folge dieser Kompression um den Theil $\frac{p}{E}$ seiner Länge, also überhaupt um das Stück $\frac{p}{E}$ d r verkürzt. Wenn daher ϱ die bei der Formveränderung entstehende Verlängerung des Radius ir, oder die Ortsverrückung des vorderen Punktes des Elementes d r darstellt; so ist $\varrho - \frac{p}{E}$ d r die Ortsveränderung des hinteren Punktes dieses Elementes; man hat daher

$$\varrho + d\varrho = \varrho - \frac{p}{E} dr$$

oder

$$d\varrho = -\frac{p}{E} dr \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Mit dieser Formel haben wir die Gl. (5), nämlich

$$s = \frac{\varrho}{r} E \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

und außerdem die Beziehung zu verbinden, welche zwischen dem Drucke p und der Spannung s in der konzentrischen Schale von der Dicke d r besteht, eine Beziehung, welche mit der Gleichung (1) identisch ist, wenn man darin $r_0 = r$, $r_1 = r + dr$, $p_0 = p$, $p_1 = p + dp$ setzt, indem diese Schale, deren innerer und äußerer Radius resp. r und r + d r ist, innerhalb die Pressung p und außerhalb die Pressung p + d p erleidet. Die letztere Beziehung ist also

$$s = -\frac{r\,dp}{dr} - p \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Nach (17) hat man

$$\varrho = \frac{rs}{E}$$

folglich, indem man für r differentiirt

$$\frac{d\varrho}{dr} = \frac{r\,ds + s\,dr}{E\,dr} = \frac{1}{E}\left(r\frac{ds}{dr} + s\right)$$

Digitized by Google

Da nach (16) $\frac{d\varrho}{dr} = -\frac{p}{E}$ ist; so ergiebt sich

$$p = -\left(r\,\frac{ds}{dr} + s\right) \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

und durch Differentiation für r

$$\frac{dp}{dr} = -\left(r\,\frac{d^2s}{dr^2} + 2\,\frac{ds}{dr}\right)$$

Substituirt man diese Ausdrücke für p und $\frac{dp}{dr}$ in (18); so kömmt

$$r\,\frac{d^2s}{dr^2} + 3\,\frac{ds}{dr} = 0$$

oder

$$\frac{d^2s}{dr^2} = -\frac{3}{r}\,\frac{ds}{dr}$$

Setzt man $\frac{ds}{dr} = s^1$; so ist hiernach

$$\frac{ds^1}{dr} = -\frac{3}{r}\,s^1$$

oder

$$\frac{ds^1}{s^1} = -3\,\frac{dr}{r}$$

folglich, wenn man zwischen den unteren Grenzen r_0, s^1_0 und den oberen Grenzen r, s integrirt,

$$\log\frac{s^1}{s^1_0} = \log\frac{r_0^3}{r^3}$$

Hiernach ist

$$\frac{s^1}{s^1_0} = \frac{r_0^3}{r^3}$$

$$s^1 = \frac{r_0^3\,s^1_0}{r^3}$$

oder wenn man für s^1 wieder seinen Werth $\frac{ds}{dr}$ einführt,

$$ds = \frac{r_0^3\,s^1_0}{r^3}\,dr$$

Integrirt man jetzt wieder zwischen den unteren Grenzen r_0, s_0 und den oberen Grenzen r, s; so ergiebt sich

$$s - s_0 = \frac{r_0^3\,s^1_0}{2}\left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2}\right)$$

In dieser Formel ist noch für s^1_0 sein Werth zu substituiren. Derselbe ergiebt sich aus (19), indem man hiernach

$$\frac{ds}{dr} = s^1 = -\frac{s+p}{r}$$

Digitized by Google

also

$$s'_0 = -\frac{s_0 + p_0}{r_0}$$

hat. Demgemäß wird die zuletzt gefundene Formel

$$s = \frac{s_0 - p_0}{2} + \frac{s_0 + p_0}{2}\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \quad . \quad . \quad (20)$$

Führen wir diesen Werth von s in die Grundgleichung (4) ein; so ergiebt sich

$$\int_{r_0}^{r_1}\left(\frac{s_0 - p_0}{2} + \frac{s_0 + p_0}{2}\frac{r_0^2}{r^2}\right) dr = r_0 p_0 - r_1 p_1$$

also

$$\frac{s_0 - p_0}{2}(r_1 - r_0) + \frac{s_0 + p_0}{2} r_0^2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0}\right) = r_0 p_0 - r_1 p_1$$

Eine Auflösung für die Spannung s_0 in der inneren Wandfläche giebt

$$s_0 = \frac{(r_1^2 + r_0^2) p_0 - 2 r_1^2 p_1}{r_1^2 - r_0^2} \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

$$= \frac{\left[(b + r_0)^2 + r_0^2\right] p_0 - 2(b + r_0)^2 p_1}{(b + r_0)^2 - r_0^2}$$

Umgekehrt, erhält man für die Wanddicke b

$$b = r_0 \left\{ \sqrt{\frac{s_0 + p_0}{s_0 - p_0 + 2 p_1}} - 1 \right\} \quad . \quad . \quad (22)$$

also für die Praxis, bei n facher Sicherheit,

$$b = r_0 \left\{ \sqrt{\frac{\frac{1}{n} f + p_0}{\frac{1}{n} f - p_0 + 2 p_1}} - 1 \right\} \quad . \quad . \quad (23)$$

und wenn der äußere Druck $p_1 = 0$ wäre,

$$b = r_0 \left\{ \sqrt{\frac{\frac{1}{n} f + p_0}{\frac{1}{n} f - p_0}} - 1 \right\} \quad . \quad . \quad (24)$$

Um aus einer gegebenen Spannung s_0 in der inneren Wandfläche den entsprechenden inneren Druck p_0 pro Quadrateinheit zu berechnen, hat man nach Gleichung (21)

$$p_0 = \frac{(r_1^2 - r_0^2) s_0 + 2 r_1^2 p_1}{r_1^2 + r_0^2} \quad . \quad . \quad . \quad (24^a)$$

Blakely zitirt ebenfalls die Formel (21) unter der Voraussetzung $p_1 = 0$ und schreibt dieselbe dem Dr. Hart zu. Nach Redtenbachers Resultaten des Ma-

Digitized by Google

schinenbaues ist dieselbe auch schon von Lamé aufgestellt. Es liegen mir keine Notizen vor, wer jene Formel zuerst entwickelt hat und unter welchen Annahmen Dieß geschehen ist. Da sich dieselbe aber nach Vorstehendem aus den mechanischen Prinzipien ohne alle weiteren Hypothesen und Abkürzungen ergiebt; so ist wohl anzunehmen, dass auch Lamé und Hart sich keiner vereinfachenden Hypothesen dabei bedient haben werden.

Die Gleichung (23) enthält das für die Praxis äußerst wichtige Resultat, dass es für jedes Material einen Grenzwerth des inneren Druckes giebt, welcher in keinem Falle überschritten werden darf, wie groß auch die Wanddicke und wie klein die innere Weite der Röhre sei. Dieser Grenzwerth ist $p_0 = f + 2p_1$ oder wenn kein äußerer Druck vorhanden wäre, $p_0 = f$, d. h. gleich der absoluten Festigkeit des Materials.

Überschritte der innere Druck diesen Grenzwerth; so würde das Material von der inneren Wandfläche aus, selbst bei unendlicher Wanddicke zerreißen.

Will man für die Praxis n fache Sicherheit haben; so reduzirt sich der äußerste Grenzwerth des inneren Druckes, welcher eine unendlich große Wanddicke erforderte, auf $p_0 = \frac{1}{n} f + 2p_1$.

Aus Gleichung (20) erkennt man, dass die Spannung s in den konzentrischen Schalen aus einem konstanten und einem veränderlichen Gliede besteht, welches letztere im umgekehrten Quadrate des Radius r variirt.

Differentiirt man den Ausdruck für s nach r und setzt den sich ergebenden Werth von $\frac{ds}{dr}$ in Gl. (19); so erhält man für den Druck p, welcher im Abstande r in der Richtung des Radius stattfindet,

$$p = \frac{s_0 + p_0}{2}\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 - \frac{s_0 - p_0}{2} \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

ein Ausdruck, welcher dasselbe Gesetz, wie die Spannung s im Kreisumfange befolgt.

Durch den Werth von s_r aus (21) kann man die Spannung s aus (20) in die Form

$$s = \frac{r_0^2 (r^2 + r_1^2) p_0 - r_1^2 (r^2 + r_0^2) p_1}{r^2 (r_1^2 - r_0^2)} \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

und den Druck p aus (25) in die Form

$$p = \frac{r_0^2 (r_1^2 - r^2) p_0 + r_1^2 (r^2 - r_0^2) p_1}{r^2 (r_1^2 - r_0^2)} \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

bringen.

Eine Substitution von s in den Ausdruck $\varrho = \frac{r s}{E}$ lässt den Werth der Größe ϱ erkennen, um welchen sich der Radius r bei der Formveränderung der Röhre verlängert. Hieraus ergeben sich leicht die Werthe

Digitized by Google

$$\varrho_0 = \frac{r_0 \left[(r_1^2 + r_0^2)\, p_0 - 2 r_1^2\, p_1\right]}{(r_1^2 - r_0^2)\, E}$$

$$\varrho_1 = \frac{r_1 \left[2 r_0^2\, p_0 - (r_1^2 + r_0^2)\, p_1\right]}{(r_1^2 - r_0^2)\, E}$$

Für eine sehr dünne Röhrenwand werden diese Ausdrücke beide gleich

$$\varrho = \frac{r^2 (p_0 - p_1)}{b\, E}$$

Bezeichnet man den Flächeninhalt $(r_1^2 - r_0^2)\,\pi$ des ursprünglichen Querschnittes der Röhre mit F und den Flächeninhalt $\left[(r_1 + \varrho)^2 - (r_0 + \varrho_0)^2\right]\pi$ nach der Formveränderung mit F′; so findet man, wenn der äußere Druck $p_1 = 0$ ist,

$$F' = F + \frac{r_0^2\, p_0}{E^2}\,(2E - p_0)\,\pi$$

Es findet also eine wirkliche Vergrößerung des Querschnittes um den Betrag $\frac{r_0^2\, p_0\, \pi}{E^2}\,(2E - p_0)$ statt, welcher, da der innere Druck p_0 im Vergleich zu dem Elastizitätsmodel E stets sehr klein sein wird, nahezu gleich $\frac{2\, r_0^2\, p_0\, \pi}{E}$ ist.

Die Vergrößerung, welche der Hypothese von Brix entsprechen würde, ist, da man für jene Voraussetzung

$$F' = \left[(r_1 + \varrho_0)^2 - (r_0 + \varrho_0)^2\right]\pi = F + 2\,(r_1 - r_0)\,\varrho^0\,\pi$$

und $\varrho_0 = \frac{r_0\, S_0}{E}$ hat, gleich $\frac{2\, r_0\, (r_1 - r_0)\, p_0\, \pi}{E \log \frac{r_1}{r_0}}$ sein.

Diese hypothetische Vergrößerung ist zwar größer, als die wirkliche; sie weicht aber, solange der äußere Radius r_1 das Dreifache des inneren Radius r_0 nicht übersteigt, also in allen praktischen Fällen weniger von der Wahrheit ab, als die Hypothese von Barlow, welche gar keine Vergrößerung des Querschnittes zuläßt.

Ebendasselbe gilt von den Formeln für die Wanddicke. Es wird nicht uninteressant sein, die Resultate der vier vorstehend entwickelten Formeln für die Wanddicke zur Vergleichung nebeneinander zu setzen. Wir wollen zu diesem Zwecke zur Abkürzung annehmen, der äußere Druck p_1 sei null oder p_0 stelle den Überdruck des inneren Mediums gegen den des äußeren dar. Man hat alsdann für das Verhältniß $\frac{b}{r_0}$ der Wanddicke b zum inneren Durchmesser r_0

nach der alten Formel (3) $\frac{b}{r_0} = \frac{p_0}{\frac{1}{n} f}$

nach der Formel von Brix (9) $\frac{b}{r_0} = e^{\frac{p_0}{\frac{1}{n} f}} - 1$

nach der Formel von Barlow (14) $\frac{b}{r_0} = \frac{p_0}{\frac{1}{n} f - p_0}$

nach der Formel von Lamé (24) $\frac{b}{r_0} = \sqrt{\frac{\frac{1}{n} f - p_0}{\frac{1}{n} f - p_0}} - 1$

Verlangt man für Metalle 10fache, für Holz dagegen 15fache Sicherheit, beachtet auch, daſs bei hölzernen Röhren diejenige absolute Festigkeit in Anspruch genommen wird, welche in normaler Richtung gegen die Fibern stattfindet, welche also bedeutend geringer ist, als die absolute Festigkeit für in der Zugrichtung liegende Fibern; so erhält man zunächst folgende Werthe für $\frac{1}{n} f$ nach preuſsischem Maſse und Gewichte.

Material.	Absolute Festigkeit f in Pfunden pro □Zoll.	Absolute Festigkeit f in Atmosphären à 15 Pfund pro □Zoll.	Sicherheitskoeffizient n	Festigkeitskoeffizient oder gröſste zulässige Spannung $\frac{1}{n} f$ in Atmosphären à 15 Pfund pro □Zoll.
Gusseisen	19000	1266	10	126
Kanonengut	34000	2266	10	226
Gussstahl	120000	8000	10	800
Fichtenholz, in der Richtung der Fibern . .	11000	733	15	49
Fichtenholz, normal gegen die Fibern . . .	440	30	15	2
Eichenholz, in der Richtung der Fibern . .	11000	733	15	49
Eichenholz, normal gegen die Fibern . . .	550	37	15	2,5

Digitized by Google

Zu der vorstehenden Tabelle bemerke ich, daſs ich die absolute Festigkeit des Fichten- und Eichenholzes für den Fall, daſs die Fibern normal auf der Zugrichtung stehen, durch Versuche ermittelt und dabei gefunden habe, daſs diese Festigkeit bei Fichtenholz nur den 25sten Theil und bei Eichenholz nur den 20sten Theil derjenigen Festigkeit beträgt, welche für die in der Richtung des Zuges liegenden Fibern stattfindet.

Um die in dieser Tabelle enthaltenen Werthe der größten zulässigen Spannung $\frac{1}{n}\,f$ auf die obigen Formeln in Anwendung zu bringen, hätte man für den inneren Druck p_o nach und nach verschiedene Werthe in Atmosphären zu substituiren. Man erhält jedoch auf dem kleinsten Raume die größte Übersicht von Resultaten, wenn man den inneren Druck p_o in Theilen der größten zulässigen Spannung $\frac{1}{n}\,f$ ausdrückt, also $p_o = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{n}\,f\right)$ setzt.

Hierdurch wird

die alte Formel $\frac{b}{r_o} = \frac{1}{m}$

die Formel von Brix $\frac{b}{r_o} = e^{\frac{1}{m}} - 1$

die Formel von Barlow $\frac{b}{r_o} = \frac{1}{m-1}$

die Formel von Lamé $\frac{b}{r_o} = \sqrt{\frac{m+1}{m-1}} - 1$

Diese Formeln geben nachstehende Resultate, welche in gleicher Weise für die verschiedensten Materialien Gültigkeit haben.

Digitized by Google

Innerer Druck in Theilen der größten zulässigen Spannung $\frac{1}{m}$	Nach der alten Formel $\frac{b}{r_0}$	Nach der alten Formel: Differenz gegen die Formel von Lamé.	Nach der Formel von Brix $\frac{b}{r_0}$	Nach der Formel von Brix: Differenz gegen die Formel von Lamé.	Nach der Formel von Barlow $\frac{b}{r_0}$	Nach der Formel von Barlow: Differenz gegen die Formel von Lamé.	Nach der Formel von Lamé $\frac{b}{r_0}$
0,01	0,01000	— 0,00005	0,01005	0,00000	0,01010	+ 0,00005	0,01005
0,05	0,05000	— 0,00132	0,05127	— 0,00005	0,05263	+ 0,00131	0,05132
0,10	0,1000	— 0,0055	0,1052	— 0,0003	0,1111	+ 0,0056	0,1055
0,15	0,1500	— 0,0132	0,1618	— 0,0014	0,1765	+ 0,0133	0,1632
0,20	0,2000	— 0,0247	0,2214	— 0,0033	0,2500	+ 0,0253	0,2247
0,30	0,300	— 0,063	0,350	— 0,013	0,429	+ 0,066	0,363
0,40	0,400	— 0,128	0,492	— 0,036	0,667	+ 0,139	0,528
0,50	0,500	— 0,232	0,649	— 0,083	1,000	+ 0,268	0,732
0,60	0,600	— 0,400	0,829	— 0,178	1,500	+ 0,500	1,000
0,70	7,700	— 0,680	1,014	— 0,366	2,333	+ 0,853	1,380
0,80	0,800	— 1,200	1,226	— 0,774	4,000	+ 2,000	2,000
0,90	0,900	— 2,459	1,469	— 1,899	9,000	+ 5,441	3,338
0,95	0,950	— 4,225	1,596	— 3,652	19,000	+ 13,725	5,245
1	1	— ∞	1,718	— ∞	∞	+ ∞	∞

Die letztere Tafel führt zu folgenden Betrachtungen.

Wenn der innere Druck im Verhältniss zur größten zulässigen Spannung schwach ist, sind alle vier Formeln gleich brauchbar. Mit wachsendem inneren Drucke werden die Abweichungen der ersten drei Näherungsformeln von der genauen Formel jedoch sehr bedeutend und übersteigen endlich jedes Maß. Die alte

Digitized by Google

Formel und die von Brix ergeben stets zu kleine, die von Barlow stets zu große Werthe. Die Barlowsche Formel weicht von der Wahrheit am meisten ab.

Aus der zuvor mitgetheilten Tafel der größten zulässigen Spannung erkennt man, daß gusseiserne Röhren mit 10facher Sicherheit nicht einen inneren Druck von 126 Atmosphären ertragen können und daß das absolute Maximum des inneren Druckes, mit Verzicht auf alle Sicherheit, und bei unendlich großer Wanddicke doch nur 1266 Atmosphären beträgt. Der Sicherheitsgrad einer gusseisernen, hydraulischen Presse von 10 Zoll Durchmesser und 7½ Zoll Wanddicke, wofür also $\frac{b}{r_0} = 1{,}8$ ist, würde bei einem inneren Drucke von 800 Atmosphären nur gleich $1{,}_{14}$ sein; das Rohr würde sich also auf der Grenze des Bruches befinden.

Der Unfall, welcher allen derartigen Pressen beim ersten Versuche des Stapellaufes des Leviathan widerfahren ist, findet hierdurch seine natürliche Erklärung und weist in beredter Weise auf die Nothwendigkeit hin, in solchen praktischen Fällen die feineren Untersuchungen der Festigkeitstheorie zu Rathe zu ziehen.

Kolbenzylinder aus Gussstahl, welche mit 10facher Sicherheit bei unendlicher Wanddicke einen Druck von 800 Atmosphären, bei 10 Zoll Weite und 7½ Zoll Wanddicke einen Druck von 580 Atmosphären und bei einer Wanddicke, welche gleich der inneren Weite, für welche also $\frac{b}{r_0} = 2$ ist, einen Druck von 640 Atmosphären ertragen können, würden schon eher im Stande gewesen sein, die beim Stapellauf des Leviathan erforderliche Leistung zu gewähren.

In Zuckerraffinerien verlangt man von hydraulischen Pressen gewöhnlich eine Arbeit unter dem Drucke von 300 Atmosphären. Dieß ist durch gusseiserne Zylinder mit 10facher Sicherheit gar nicht zu erreichen; ja selbst bei nur 4facher Sicherheit würde es eine unendlich große Wanddicke erfordern. Bei Wanddicken, welche gleich der inneren Weite, für welche also $\frac{b}{r_0} = 2$ ist, kann ein gusseisernes Rohr mit 10facher Sicherheit nur einen Druck von 100 Atmosphären ertragen, unter einem Drucke von 300 Atmosphären bietet dasselbe nur 3,₃fache Sicherheit dar und durch einen Druck von 1000 Atmosphären wird es gesprengt.

Wasserröhren von Fichtenholz können mit 15facher Sicherheit nur einen Druck von 2 Atmosphären ertragen, wenn der äußere Druck null ist. Da in der Praxis der äußere Druck fast immer der atmosphärische sein wird, welcher im Vergleich zu dem vorstehenden Maximum des inneren Druckes als sehr erheblich erscheint; so darf auf hölzerne Röhren nicht die für die Voraussetzung $p_1 = 0$ gültige Formel (24) und noch weniger irgend eine der früheren Näherungsformeln angewandt werden. Man muß sich vielmehr der Formel (23) bedienen, welche, wenn alle Kräfte in Atmosphären ausgedrückt werden und $p_1 = 1$ gesetzt wird, die Gestalt

Digitized by Google

$$b = r_o \left\{ \sqrt{\frac{\frac{1}{n} f + p_o}{\frac{1}{n} f + 2 - p_o}} - 1 \right\}$$

annimmt.

Hiernach ergiebt sich die äußerste Grenze des inneren Druckes zu $p_o = \frac{1}{n} f + 2$, also für Fichtenholz zu 4 Atmosphären. Dieser innere Druck wird bei Wasserröhren, deren freier Wasserspiegel dem atmosphärischen Drucke ausgesetzt ist, wie es fast immer der Fall sein wird, durch eine Wassersäule von 3 . 33 = ppr. 100 Fuß hervorgebracht.

Diese äußerste Grenze des inneren Druckes erfordert aber eine unendlich große Wanddicke. Fichtenröhren, deren Wanddicke gleich der inneren Weite ist, würden mit 15facher Sicherheit nur einen Druck von 3,4 Atmosphären aushalten, welcher durch eine mit einem freien Spiegel versehene Wassersäule von 2,4 . 33 = 80 Fuß erzeugt wird.

Kanonengut kann mit 10facher Sicherheit einen Druck von 226 Atmosphären und auf der Grenze des Bruches einen Druck von 2266 Atmosphären ertragen. Dieß setzt jedoch eine unendlich große Wanddicke voraus. Ist die Wanddicke gleich der inneren Weite oder $\frac{b}{r_o} = 2$; so reduzirt sich der größte zulässige Druck bei 10facher Sicherheit auf 180 Atmosphären und für die Grenze der Festigkeit auf 1800 Atmosphären.

Da beim Feuern mit Kanonen Pressungen von 1000 bis 2000 Atmosphären vorkommen; so leuchtet ein, daß sich dabei das Kanonengut nahe an der Grenze seiner Festigkeit befindet und daß diese Grenze bei gusseisernen Kanonen häufig überschritten werden würde, wie auch die Belagerung von Sveaborg gelehrt hat, wo viele gusseiserne Schiffskanonen der englischen Marine gesprungen sein sollen.

Für Apparate, welche so bedeutende Effekte liefern sollen, wie Kanonen und hydraulische Pressen, erweis't sich also ein Material wie Gusstahl, welches die 3½fache Festigkeit des Kanonengutes und die 6fache Festigkeit des Gusseisens besitzt, als unschätzbar, indem diese größere natürliche Festigkeit durch keine Massenvermehrung des weniger festen Materials aufgewogen werden kann.

Für hydraulische Pressen gewährt der Gusstahl die Möglichkeit, das absolute Maximum des Effektes bei demselben Sicherheitsgrade in demselben Verhältnisse zu steigern, in welchem die Festigkeit des Gusstahles die der übrigen Materialien übertrifft. Man wird also aus Gusstahl hydraulische Pressen mit 6mal so großer Wirkung herstellen können, wie es aus Gusseisen möglich ist.

Bei Kanonen, wo der zur Fortschleuderung einer Vollkugel erforderliche Druck pro Quadratzoll nach einer ungefähren Abschätzung wegen des Gewichtes der Kugel

Digitized by Google

etwa im direkten Verhältnisse des Kubus des Radius und wegen des Querschnittes der Druckfläche im indirekten Verhältnisse des Quadrates des Radius, überhaupt also im einfachen Verhältnisse des Radius der Kugel variirt, wird der Radius des größten Geschosses nahezu im direkten Verhältnisse, das Gewicht dieses Geschosses also im Verhältnisse der dritten Potenz der absoluten Festigkeit des Geschützmaterials stehen. Die schwerste aus gusstählernen Kanonen zu werfende Vollkugel wird mithin $(3\frac{1}{2})^3 = 43$ mal so schwer sein, als die einem broncenen Geschütze entsprechende Maximalkugel, oder Gusstahl wird bei gleicher Sicherheit ein $3\frac{1}{2}$mal so großes Kaliber zulassen, wie Bronce. Umgekehrt wird bei gleichem Kaliber und gleicher Ladung das Gusstahlrohr eine $3\frac{1}{2}$mal so große Sicherheit darbieten, wie das Broncerohr, was für die Haltbarkeit von sehr großer Bedeutung sein muss, da der Sicherheitskoeffizient bei Broncegeschützen unter gewöhnlichen Verhältnissen sehr klein, nämlich etwa gleich 2 ist.

Bei Kanonen kommt zwar in Betracht, dass der in Rede stehende starke Druck nur im Anfange der Pulverexplosion, also in einem Augenblicke stattfindet, wo sich die Kugel unmittelbar vor dem Boden des geschlossenen Rohres befindet, und dieses Rohr nicht auf seine ganze Länge mit dem drückenden Medium gefüllt ist, während alle obigen Untersuchungen streng genommen ein an beiden Seiten offenes Rohr mit ganzer Füllung voraussetzen. Durch diesen Umstand werden zwar die vorstehenden relativen Verhältnisszahlen, welche sich auf die Vergleichung zweier verschiedenen Materiale beziehen, nicht wesentlich geändert, wohl aber die Zahlen, welche die absolute Widerstandsfähigkeit irgend eines besonderen Materials darstellen. Da nun jedem einzelnen Materiale eine Grenze seiner Anwendbarkeit gesteckt ist, welche von keinem minder festen Stoffe, auch nicht durch noch so großen Massenaufwand erreicht werden kann; so ist es allerdings für die Praxis von Wichtigkeit zu wissen, in welcher Weise sich die Widerstandsfähigkeit eines Rohres dadurch ändert, dass dasselbe an einem oder an beiden Enden geschlossen oder dass dasselbe nur theilweise mit dem drückenden Medium gefüllt ist.

Wir werden dieser Untersuchung einen besonderen Abschnitt widmen, zunächst jedoch den Fall betrachten, wo es sich um eine Hohlkugel handelt.

2. Hohlkugeln.

Eine Hohlkugel wird sich durch den Druck eines inneren Mediums dergestalt ausdehnen, dass in allen Punkten einer unendlich dünnen Kugelschale dieselbe Spannung nach allen Richtungen hin stattfindet. Betrachten wir daher einen ringförmigen Querschnitt; so wird unter Beibehaltung der früheren Bezeichnung die Elastizitätskraft eines Ringes, dessen Radius r, dessen unendlich geringe Dicke dr, dessen Fläche also $2\pi r\,dr$ ist, gleich $2\pi rs\,dr$ sein. Der ganze Querschnitt der

Digitized by Google

Kugel entwickelt also die Elastizitätskraft $2\pi \int_{r_0}^{r_1} r\,s\,dr$. Die mit dieser Kraft parallele Resultante aller auf die innere Halbkugel wirkenden Pressungen ist $\pi r_0^2 p_0$ und die für die äußere Halbkugel $\pi r_1^2 p_1$. Hieraus ergiebt sich die Grundgleichung

$$2 \int_{r_0}^{r_1} r\,s\,dr = r_0^2 p_0 - r_1^2 p_1 \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Ist die Wanddicke der Kugel sehr klein, sodaß man die Spannung s als konstant in jedem Abstande vom Mittelpunkte ansehen kann; so erhält man aus vorstehender Formel durch Integration

$$s\,(r_1^2 - r_0^2) = r_0^2 p_0 - r_1^2 p_1$$

$$s = \frac{r_0^2\,(p_0 - p_1)}{r_1^2 - r_0^2} - p_1$$

$$= \frac{r_0^2\,(p_0 - p_1)}{b\,(b + 2\,r_0)} - p_1$$

oder da die relative Kleinheit der Wanddicke b eine wesentliche Bedingung ist, sodaß man b gegen $2\,r_0$ vernachlässigen kann

$$s = \frac{r_0\,(p_0 - p_1)}{2\,b} - p_1 \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

$$b = \frac{r_0\,(p_0 - p_1)}{2\,(s + p_1)} \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Aus einer Vergleichung dieser Formel mit Gleichung (2) geht hervor, daß eine Hohlkugel bei demselben inneren Drucke pro Quadrateinheit nur eine halb so große Wanddicke bedarf wie eine Röhre. Dieses Resultat gilt übrigens nur für dünne Wände; für Kugeln mit sehr dicken Wänden hat man die Veränderlichkeit der Form und der Spannung in folgender Weise zu berücksichtigen.

Da in einer elementaren Kugelschale, welche sich von dem Radius r auf den Radius $r + \varrho$ ausdehnt, jede Faser, gleichviel welches ihre Richtung sei, in demselben Verhältnisse, also um den Theil $\frac{\varrho}{r}$ ihrer Länge ausgedehnt wird; so hat man auch hier die Bezeichnung

$$s = \frac{\varrho\,E}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

Jetzt kommt es noch darauf an, die Beziehungen zwischen dem in der Richtung des Radius stattfindenden Drucke p, der Spannung s und der Linearausdehnung ϱ aufzustellen. Zu diesem Ende hat man hier aus denselben Gründen, unter welchen die Formel (16) entwickelt ist,

$$d\varrho = -\frac{p}{E}\,dr \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Digitized by Google

Außerdem ist nach Gleichung (29), welche für eine unendlich dünne Kugelschale vollkommene Gültigkeit hat, indem man $r_0 = r$, $b = dr$, $p_0 = p$, $p_1 = p + dp$ setzt,

$$s = -\frac{r}{2}\frac{dp}{dr} - p \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

Aus (31) folgt $\varrho = \frac{rs}{E}$, also durch Differentiation für r

$$\frac{d\varrho}{dr} = \frac{1}{E}\left(r\frac{ds}{dr} + s\right)$$

Nach (32) hat man daher

$$p = -\left(r\frac{ds}{dr} + s\right) \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

und durch Differentiation für r

$$\frac{dp}{dr} = -\left(r\frac{d^2s}{dr^2} + 2\frac{ds}{dr}\right)$$

Substituirt man diese Werthe von p und $\frac{dp}{dr}$ in Gl. (33); so kommt

$$\frac{d^2s}{dr^2} = -\frac{4}{r}\frac{ds}{dr}$$

Setzt man $\frac{ds}{dr} = s'$; so ist

$$\frac{ds'}{dr} = -\frac{4}{r}s'$$

oder

$$\frac{ds'}{s'} = -4\frac{dr}{r}$$

folglich, wenn man zwischen den unteren Grenzen r_0, s'_0 und den oberen Grenzen r, s integrirt,

$$\log\frac{s'}{s'_0} = \log\frac{r_0^4}{r^4}$$

$$\frac{s'}{s'_0} = \frac{r_0^4}{r^4}$$

$$s' = \frac{ds}{dr} = \frac{r_0^4 s'_0}{r^4}$$

$$ds = \frac{r_0^4 s'_0}{r^4}dr$$

und wenn man wieder zwischen den unteren Grenzen s_0, s und den oberen Grenzen r_0, r integrirt

$$s - s_0 = \frac{r_0^4 s_0'}{3}\left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r^3}\right)$$

Digitized by Google

Der Werth von s_0' ergiebt sich aus Gl. (34), indem man danach

$$\frac{ds}{dr} = s' = -\frac{s + p}{r},$$

also $s_0' = -\frac{s_0 + p_0}{r_0}$ hat. Demgemäß ist

$$s = \frac{2 s_0 - p_0}{3} + \frac{r_0^3 (s_0 + p_0)}{3 r^3} \quad . \quad . \quad (35)$$

Substituirt man diesen Werth von s in Gl. (28); so findet man nach gehöriger Integration und Reduktion

$$\frac{2 (r_1^3 - r_0^3) s_0 - (r_1^3 - 3 r_0^2 r_1 + 2 r_0^3) p_0}{3 r_1} = r_0^3 p_0 - r_1^3 p_1,$$

also

$$s_0 = \frac{(r_1^3 + 2 r_0^3) p_0 - 3 r_1^3 p_1}{2 (r_1^3 - r_0^3)} \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

Löst man diese Gleichung für r_1 auf und setzt dann $r_1 = b + r_0$; so kommt

$$b = r_0 \left\{ \sqrt[3]{\frac{2 (s_0 + p_0)}{2 s_0 - p_0 + 3 p_1}} - 1 \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

und wenn der äußere Druck $p_1 = 0$ ist,

$$b = r_0 \left\{ \sqrt[3]{\frac{2 (s_0 + p_0)}{2 s_0 - p_0}} - 1 \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

Man erkennt, daß auch für die Hohlkugel der innere Druck p_0 eine gewisse Grenze nicht übersteigen darf. Diese Grenze, welche eine unendlich große Wanddicke erfordert, ist $= 2 s_0 + 3 p_1$ und wenn kein äußerer Druck vorhanden ist, $= 2 s_0$, also in letzterem Falle doppelt so groß, wie die für eine Röhre gültige Grenze.

3. Röhren

mit geschlossenen Enden u. Bändern, unter der Voraussetzung dünner Wände.

Wir wollen jetzt die Haltbarkeit solcher Röhren untersuchen, welche an dem einen oder an beiden Enden geschlossen oder mit Bändern versehen sind, und es handele sich zunächst um eine Röhre, deren Wanddicke in Vergleich zu ihrer Weite sehr gering ist.

Röhren dieser Art werden sich unter dem Drucke von Flüssigkeiten nicht gleichmäßig erweitern; der Längendurchschnitt der Wand wird vielmehr aus der geradlinigen Gestalt in die krummlinige übergehen. Die Form dieser Kurve und die damit verbundene Variation der Spannung ist abhängig von der Art und Weise des Zwanges, welchen man an gewissen Stellen durch Verschlußanlagen auf die Röhre ausübt. Diese Verschlußanlagen können aber in Beziehung auf ihren mechanischen Effekt zweierlei Art sein.

Erstens können sie einfach bewirken, daß die Weite der Röhre an dieser oder jener Stelle sich nicht ändert. Ein solcher Effekt wird durch ein absolut festes

Digitized by Google

ringförmiges Band A (Fig. 1) erzeugt und hat in der Theorie der Biegung prismatischer Stäbe sein Analogon in einem einfachen Unterstützungspunkte.

Zweitens kann eine Verschlussanlage außer der Fixirung des Querschnittes noch die fernere Wirkung äußern, dass an jener Stelle die Tangente des Längenschnittes der Röhre parallel zur Röhrenare bleibt. Diese Wirkung kann nicht durch ein einfaches Band, wohl aber durch zwei dicht nebeneinander liegende Bänder A (Fig. 2) erzeugt werden, deren eines von außen nach innen, deren anderes aber von innen nach außen drückt. Statt eines solchen Doppelbandes kann man sich auch ein absolut festes inneres oder äußeres Band von endlicher Länge denken, mit welchem die Röhrenwand verwachsen ist. Wir werden diesen vollkommeneren Verschluss im Folgenden kurz mit dem Worte Doppelband belegen: derselbe tritt hier an die Stelle derjenigen Befestigung, welche man bei der Biegung prismatischer Stäbe eine Vermauerung nennt.

Jetzt sei (Fig. 3)

l die Länge A B der Röhre,

r der konstante Radius A D im ursprünglichen Zustande der Röhre,

b die sehr kleine Wanddicke,

p der innere Druck pro Quadrateinheit,

q der Überdruck des inneren Druckes über den äußeren pro Quadrateinheit (früher mit $p_0 - p_1$ bezeichnet),

Q der Druck, welchen ein um die Röhre gelegtes Band C in der Richtung des Radius ausübt, pro Längeneinheit des Umfanges,

c die Abszisse A C für den Ring, in welchem der Druck Q wirkt,

s die Spannung der ringförmigen Fiber für die in der Längenrichtung der Röhre gemessene Abszisse x, pro Quadrateinheit,

ϱ die Vergrößerung des Radius r für die Abszisse x in Folge der Formveränderung der Röhre,

φ der Neigungswinkel der Tangente an der Kurve, welche den Längenschnitt der Röhrenwand bildet, gegen die Röhrenare, für die Abszisse x,

R der Krümmungshalbmesser der Kurve, welche der Längenschnitt der Röhre annimmt, für die Abszisse x,

E der Elastizitätsmodel für das Material der Röhre in der Richtung eines kreisförmigen Querschnittes,

E_1 der Elastizitätsmodel in der Richtung des Längenschnittes der Röhre,

α das Verhältniss $\frac{E}{E_1}$ der vorstehend bezeichneten beiden Elastizitätsmodel, welches für Metalle oder andere nach allen Richtungen homogene Materialien $= 1$ ist,

t die Kraft pro Flächeneinheit, womit der der Abszisse x entsprechende ringförmige Querschnitt auf seinem benachbarten Querschnitte nach außen oder innen abzugleiten oder sich abzuscheren strebt.

Digitized by Google

Betrachten wir jetzt einen sehr schmalen in der Längenrichtung der Röhre liegenden Streifen der Röhrenwand, welcher einem sehr kleinen Zentrumswinkel $DAE = 2\omega$ (Fig. 4) entspricht, welcher also zwischen zwei durch die Röhrenare gehenden und unter dem Winkel 2ω gegeneinander geneigten Ebenen DA, EA liegt. Die mittlere Breite DE eines solchen Streifens, gemessen in der Peripherie des Querschnittes der Röhre, ist $2\omega r$, der Querschnitt desselben also, welcher wegen der sehr geringen Dicke der Röhrenwand als ein Rechteck anzusehen ist, gleich $2\omega r b$.

Auf diesen Wandstreifen NE (Fig. 3), welcher im Endpunkte der Abszisse x abgeschnitten sein soll und sich von dort aus bis zum rechtsseitigen Ende der Röhre erstreckt, wirken folgende Kräfte.

1) In direkter Richtung des Radius r, also von innen nach außen, der hydrostatische Überdruck, welcher für jedes Längenelement des Streifens von der Länge dx den Betrag $2\omega r q dx$, für den ganzen Streifen aber den Betrag $2\omega r q (l - x)$ hat.

2) Die im Umfange der Röhre wirkende Spannung, welche normal gegen beide Langseiten des Streifens gerichtet ist. Für jedes Längenelement des Streifens haben die zu beiden Seiten wirkenden Spannungen den Betrag $b s dx$, und dieselben setzen sich zu einer Resultante zusammen, welche in umgekehrter Richtung des Radius, nämlich von außen nach innen wirkt und in dieser Richtung den Betrag $2 b s \sin\omega dx$ hat, wofür man wegen der Kleinheit des Winkels ω auch $2 b s \omega dx$ setzen kann. Die Summe aller dieser Kräfte für den ganzen Streifen ist

$$\int_x^l 2 b s \omega dx = 2 b \omega \int_x^l s dx$$

3) Die in einzelnen Ringen oder Bändern um die Röhre angebrachten Kräfte, insofern solche Kräfte in dem Bereiche des betrachteten Streifens liegen. Ist für irgend ein solches Band Q der Druck pro Längeneinheit des Umfanges in der umgekehrten Richtung des Radius von außen nach innen; so kömmt auf den betrachteten Streifen der Betrag $2\omega r Q$. Sind mehrere derartige ringförmig wirkende Kräfte vorhanden; so ist ihre Summe durch $\Sigma_x^l 2\omega r Q = 2\omega r \Sigma_x^l Q$ darzustellen.

4) Die Elastizitätskräfte, welche, aus der Biegung des Streifens resultirend, in der vorderen Stirnfläche desselben wirken und parallel zur Röhrenare gerichtet sind.

5) Die in derselben Stirnfläche des Streifens von außen nach innen wirkende Abscherungskraft $2\omega r b t$.

Digitized by Google

Das Gleichgewicht aller eben erwähnten an dem fraglichen Streifen wirkenden Kräfte erfordert, daß von ihren parallel zu irgend einer Richtung genommenen Komponenten sowohl die Summe, wie auch die Momentensumme, gleich null sei.

Da die Elastizitätskräfte an der Stirnfläche des Streifens parallel zur Röhrenare, alle übrigen Kräfte aber perpendikular zur Röhrenare wirken; so haben wir ein System von Kräften vor uns, welches den bei der Biegung prismatischer Stäbe gewöhnlich betrachteten Systemen analog ist. Es gilt daher auch hier der Satz, daß die neutrale Fiber des in Rede stehenden Streifens durch dessen Schwerpunkt gehe. Unter der neutralen Fiber ist aber hier eine Längenfiber verstanden, welche in ihrer Längenrichtung weder Ausdehnung noch Kompression erleidet. Die Ausdehnung oder Kompression im kreisförmigen Querschnitte der Röhre, welche durch die Spannung s erzeugt wird, ist hiermit nicht zu verwechseln.

Die Summe der normal auf der Röhrenare stehenden Kräfte führt also zunächst zu der Gleichung

$$2\omega r q\,(l-x) - 2b\omega\int_x^l s\,dx - 2\omega r\,\Sigma_x^l Q - 2\omega r b t = 0$$

oder

$$(l-x)q - \frac{b}{r}\int_x^l s\,dx - \Sigma_x^l Q - bt = 0 \quad . . \quad (39)$$

Bezieht man diese Gleichung auf die ganze Länge der Röhre, also von $x = 0$ bis $x = l$ und beachtet, daß die Abscherungskraft t für den Anfangspunkt des Streifens offenbar null ist; so ergiebt sich, indem man die Summe aller äußerlich auf die Röhre angebrachten Kräfte Q kurz mit ΣQ bezeichnet,

$$lq - \frac{b}{r}\int_0^l s\,dx - \Sigma Q = 0 \quad . . . . . \quad (40)$$

Um jetzt die Momentengleichung aufzustellen; so ist

ad 1. Das Moment des auf den Streifen NE von der Länge $l-x$ wirkenden hydrostatischen Überdruckes, welcher für jedes Längenelement den Betrag $2\omega r q\,dx$ und für den ganzen Streifen den Betrag $2\omega r q\,(l-x)$ hat, wenn man den Anfangspunkt N des Streifens am Endpunkte der Abszisse x zum Drehungspunkte nimmt, indem dann der Hebelarm der gleichförmig über die Länge $l-x$ verteilten Kraft gleich $\frac{l-x}{2}$ ist,

$$2\omega r q\,(l-x)\,.\,\frac{l-x}{2} = \omega r q\,(l-x)^2$$

ad 2. Das Moment der aus der Spannung s im Umfange der Röhre hervorgehenden Kraft, welche für jedes Längenelement den Betrag $2b\omega s\,dx$

Digitized by Google

und für den ganzen Streifen den Betrag $2\,b\,\omega \int_x^1 s\,dx$ hat, ist, wenn man den Anfangspunkt A der gegebenen Röhre im Nullpunkte der Abszissen zum Drehungspunkte nimmt, $2\,b\,\omega \int_x^1 x\,s\,dx$.

Wenn aber der Anfangspunkt N des betrachteten Streifens im Endpunkte der Abszisse x zum Drehungspunkte dienen soll; so ist von vorstehendem Ausdrucke das Produkt der Kraft $2\,b\,\omega \int_x^1 s\,dx$ in den Hebelarm x zu subtrahiren. Dieß giebt für das gesuchte Moment, indem man zugleich wegen der Wirkung dieser Kraft in entgegengesetzter Drehungsrichtung das Zeichen des Momentes umkehrt,

$$-\,2\,b\,\omega \int_x^1 x\,s\,dx \;+\; 2\,b\,\omega\,x \int_x^1 s\,dx$$

ad 3. Das Moment der in den einzelnen ringförmigen Bändern von außen nach innen wirkenden Kräfte für den Anfangspunkt N des Streifens als Drehungspunkt ist $-\,2\,\omega\,r\,\Sigma_x^1\,(c-x)\,Q$.

ad 4. Das Moment der in der vorderen Stirnfläche des Streifens wirkenden Elastizitätskräfte oder das Biegungsmoment, wenn dasselbe eine umgekehrte Drehungsrichtung wie der hydrostatische Überdruck zu bewirken strebt, d. h. wenn die Kurve des Streifens im Punkte N eine konvere Krümmung gegen die Röhrenare hat, ist, in Erwägung, daß der Querschnitt des Streifens als ein Rechteck von der Breite $2\,\omega\,r$ und von der Höhe b anzusehen ist, nach einer aus der Biegungstheorie bekannten Formel

$$\frac{1}{12}\;.\;2\,\omega\,r\,b^3\;.\;\frac{E_1}{R} \;=\; \frac{\omega\,r\,b^3\,E_1}{6\,R}$$

In dieser Formel ist R der Krümmungshalbmesser der Längenfiber für die Abszisse x. Bezeichnet man die Ordinate der Röhrenwand nach der Formveränderung mit y, sodaß $y = r + \varrho$ ist; so hat man bekanntlich, da auch hier nur sehr schwache Biegungen vorausgesetzt werden,

$$\frac{1}{R} \;=\; \frac{d^2\,y}{d\,x^2} \;=\; \frac{d^2\,\varrho}{d\,x^2}$$

Hierdurch wird das Biegungsmoment

$$\frac{\omega\,r\,b^3\,E_1}{6}\;\frac{d^2\,\varrho}{d\,x^2}$$

Der letztere Ausdruck für das Biegungsmoment behält immer Gültigkeit, gleichviel ob die Kurve konver oder konkav ist, indem derselbe beim Übergange von der Konvexität zur Konkavität von selbst sein Zeichen ändert.

ad 5. Das Moment der in der vorderen Stirnfläche des Streifens perpendikular zu dessen Längenrichtung wirkenden Abscherungskraft ist null.

Digitized by Google

Die gesuchte Momentengleichung ist hiernach

$$\frac{\omega r b^2 E_1}{6} \frac{d^2\varrho}{dx^2} = \omega r q (l-x)^2 - 2b\omega \int_x^l x\,dx + 2b\omega x \int_x^l dx - 2\omega r \Sigma_x^l (c-x)\,Q$$

oder

$$\frac{b^2 E_1}{12} \frac{d^2\varrho}{dx^2} = \frac{(l-x)^2 q}{2} - \frac{b}{r}\int_x^l x\,dx + \frac{bx}{r}\int_x^l dx - \Sigma_x^l (c-x)\,Q \quad (41)$$

Mit den vorstehenden Gleichungen ist zuvörderst die Beziehung zu verbinden, welche ausdrückt, daß der Umfang der Röhre durch die Spannung s um den Theil $\frac{s}{E}$ seiner Länge ausgedehnt wird, was eine Vergrößerung des Radius r in demselben Verhältnisse, also die Beziehung

$$\varrho = \frac{s}{E} r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

zur Folge hat. Da hieraus

$$\frac{d\varrho}{dx} = \frac{r}{E}\frac{ds}{dx} \quad , \quad \frac{d^2\varrho}{dx^2} = \frac{r}{E}\frac{d^2 s}{dx^2}$$

folgt; so hat man statt Gleichung (41)

$$\frac{r b^2}{12\alpha} \frac{d^2 s}{dx^2} = \frac{(l-x)^2 q}{2} - \frac{b}{r}\int_x^l x\,dx + \frac{bx}{r}\int_x^l dx - \Sigma_x^l (c-x)\,Q \quad (43)$$

Außerdem müßte jetzt noch eine Beziehung aufgestellt werden, welche den Einfluß darstellt, den die Abscherungskraft t auf die Formveränderung der Röhre äußert. Dieß kann sehr leicht nach den Prinzipien geschehen, welche ich in der Schrift „Über die Festigkeit gegen das Zerknicken und die inneren Spannungen gebogener Körper, §. 29" entwickelt habe. Da jedoch die dort geführte Untersuchung lehrt, daß diese Abscherungskraft die Form des gebogenen Stabes nur äußerst wenig affizirt; so lassen wir dieselbe, um das Problem nicht zu sehr zu komplizirren, ganz aus dem Bereiche unserer Betrachtungen, wie es in der gewöhnlichen Theorie der Biegung prismatischer Stäbe ebenfalls geschieht.

Unter solchen Umständen hat die Gl. (39) in ihrer allgemeinen Gestalt keine Wichtigkeit weiter für unsere Untersuchung. Das Gesetz der Spannung s ist vielmehr aus der Momentengleichung (43) allein mit Zuhülfenahme der Gl. (40) zu entwickeln. Differentiirt man zu dem Ende Gl. (43); so kömmt

$$\frac{r b^2}{12\alpha} \frac{d^3 s}{dx^3} = -(l-x)\,q + \frac{b}{r}\int_x^l s\,dx + \Sigma_x^l Q \quad . \quad . \quad (44)$$

und differentiirt man zum zweiten Male

Digitized by Google

$$\frac{r\,b^3}{12\,a}\;\frac{d^4s}{dx^4} = q - \frac{b\,s}{r}$$

oder

$$\frac{r^2b^2}{12\,a}\;\frac{d^4s}{dx^4} = \frac{r\,q}{b} - s \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

Es ist nicht uninteressant zu bemerken, dass man die beiden Formeln (44) und (45) gleich unmittelbar und sehr einfach aus den mechanischen Eigenschaften des gegebenen Systems ohne Differentiation der Gl. (43) ableiten kann. Man beachte nämlich, dass bei dem Übergange von x zu $x + dx$ das Biegungsmoment $\frac{\omega r^2 b^3}{6\,a}\;\frac{d^2s}{dx^2}$ in $\frac{\omega r^2 b^3}{6\,a}\;\frac{d^2s}{dx^2} + \frac{\omega r^2 b^3}{6\,a}\;\frac{d^3s}{dx^3}\,dx$ übergeht.

Bezeichnet nun P die Resultante aller auf das Stück NE des fraglichen Streifens wirkenden Kräfte und p den Hebelarm derselben vom Punkte N aus, sodass das erstgedachte Biegungsmoment gleich dem Produkte p P ist; so geht dieses Produkt bei dem Anwachsen von x auf $x + dx$ in das Produkt $(p - dx)P = pP - P\,dx$ über. Hieraus folgt unmittelbar

$$\frac{\omega r^2 b^3}{6\,a}\;\frac{d^3s}{dx^3} = -P$$

als Stellvertreterin der Gl. (44).

Bezeichnet P' die Resultante der im Punkte N auf den fraglichen Streifen wirkenden Kräfte pro Längeneinheit; so geht bei der Variation von x in $x + dx$ die Größe $\frac{d^2s}{dx^2}$ in $\frac{d^2s}{dx^2} + \frac{d^4s}{dx^4}\,dx$, die Größe P dagegen in $P - P'\,dx$ über. Hiernach hat man sofort

$$\frac{\omega r^2 b^3}{6\,a}\;\frac{d^4s}{dx^4} = P'$$

welche Gleichung identisch ist mit (45).

Zur Abkürzung setzen wir jetzt

$$a = \sqrt[4]{\frac{3\,a}{r^2 b^2}} = \frac{\sqrt[4]{3\,a}}{\sqrt{r\,b}} \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

Hierdurch wird Gl. (45)

$$\frac{d^4s}{dx^4} = 4\,a^4\left(\frac{r\,q}{b} - s\right) \quad . \quad . \quad (47)$$

oder wenn man

$$\frac{r\,q}{b} - s = y \qquad \text{folglich}$$

Digitized by Google

$$s = \frac{rq}{b} - y$$

$$\frac{d^4 s}{dx^4} = - \frac{d^4 y}{dx^4}$$

setzt,

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = - 4a^4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

Das Integral dieser linearen Differentialgleichung vierter Ordnung mit konstanten Koeffizienten hat bekanntlich die Form

$$y = c_1 e^{w_1 x} + c_2 e^{w_2 x} + c_3 e^{w_3 x} + c_4 e^{w_4 x}$$

sodaß

$$s = \frac{rq}{b} - \left(c_1 e^{w_1 x} + c_2 e^{w_2 x} + c_3 e^{w_3 x} + c_4 e^{w_4 x} \right) . \quad (49)$$

ist. Hierin sind c_1, c_2, c_3, c_4 vier durch die Nebenbedingungen der Aufgabe zu bestimmende Konstanten. Die Größen w_1, w_2, w_3, w_4 aber stellen die vier Wurzeln der biquadratischen Gleichung

$$w^4 = - 4a^4$$

dar. Es ist also irgend eine dieser vier Größen

$$w = a\sqrt{2}\sqrt[4]{-1}$$

worin $\sqrt[4]{-1}$ jeden seiner vier Werthe

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \sqrt{\tfrac{1}{2}}\sqrt{-1},\ \sqrt{\tfrac{1}{2}} - \sqrt{\tfrac{1}{2}}\sqrt{-1},\ -\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \sqrt{\tfrac{1}{2}}\sqrt{-1},\ -\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \sqrt{\tfrac{1}{2}}\sqrt{-1}$$

annehmen kann. Bezeichnen wir zur Abkürzung die imaginäre Größe $\sqrt{-1}$ durch i; so ist nach Vorstehendem

$$\left.\begin{array}{ll} w_1 = 1 + i & w_2 = 1 - i \\ w_3 = -1 + i & w_4 = -1 - i \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (49^a)$$

welche Werthe in Gl. (49) zu substituiren sind.

Jetzt können wir zur Bestimmung der Konstanten c_1, c_2, c_3, c_4 schreiten. Da Dieß durch die Nebenbedingungen der Aufgabe geschehen muß; so ist nunmehr eine Spezialisirung der einzelnen in Betracht kommenden Fälle vorzunehmen. Ehe wir jedoch die Rechnung beginnen, wollen wir die vier ersten Differentialkoeffizienten von s, auf welche wir öfter rekurriren müssen, hier folgen lassen. Nach (49) hat man

Digitized by Google

$$s = \frac{rq}{b} - \left(c_1 e^{w_1 x} + c_2 e^{w_2 x} + c_3 e^{w_3 x} + c_4 e^{w_4 x}\right) \quad \ldots \quad (49)$$

$$\frac{ds}{dx} = -\left(c_1 w_1 e^{w_1 x} + c_2 w_2 e^{w_2 x} + c_3 w_3 e^{w_3 x} + c_4 w_4 e^{w_4 x}\right) \quad \ldots \quad (50)$$

$$\frac{d^2 s}{dx^2} = -\left(c_1 w_1^2 e^{w_1 x} + c_2 w_2^2 e^{w_2 x} + c_3 w_3^2 e^{w_3 x} + c_4 w_4^2 e^{w_4 x}\right) \quad (51)$$

$$\frac{d^3 s}{dx^3} = -\left(c_1 w_1^3 e^{w_1 x} + c_2 w_2^3 e^{w_2 x} + c_3 w_3^3 e^{w_3 x} + c_4 w_4^3 e^{w_4 x}\right) \quad (52)$$

$$\frac{d^4 s}{dx^4} = 4a\left(c_1 e^{w_1 x} + c_2 e^{w_2 x} + c_3 e^{w_3 x} + c_4 e^{w_4 x}\right) = \frac{rq}{b} - s \quad (53)$$

In allen diesen Gleichungen haben die Größen w_1, w_2, w_3, w_4 die Werthe aus (49a).

Außerdem bemerken wir ein für alle Mal, daß wegen der zwischen s und ϱ bestehenden Beziehung (42) die Forderung, daß irgend ein Differentialkoeffizient von ϱ, z. B. der erste $\frac{ds}{dx} = \text{tang } \varphi$ oder der zweite $\frac{d^2 s}{dx^2} = \frac{1}{R}$ gleich null sein solle, auf die Bedingung hinausläuft, daß der betreffende Differentialkoeffizient von s gleich null werde.

Endlich aber machen wir darauf aufmerksam, daß die Größen c_1, c_2, c_3, c_4 aus vier Gleichungen zu bestimmen sind. Das desfallsige Eliminationsverfahren, obgleich an sich sehr einfach, ist doch wegen der Ausdehnung der Rechnung mühsam. Man muß daher die Operation durch eine sachgemäße Leitung des Kalkuls zu vereinfachen suchen und namentlich dafür sorgen, daß die Rechnung in Komplexe zerfällt, deren Resultate in dem späteren Verlaufe des Rechnungsprozesses wieder mit Vortheil benutzt werden können.

Zu diesem Ende bemerken wir, daß wenn vier unbekannte Größen x_1, x_2, x_3, x_4 aus vier Gleichungen von folgender Form

$$\begin{aligned} a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 &= a_0 \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 &= b_0 \\ c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_4 &= c_0 \\ d_1 x_1 + d_2 x_2 + d_3 x_3 + d_4 x_4 &= d_0 \end{aligned}$$

zu bestimmen sind; so kann man setzen

$$x_1 = \frac{Z_1}{N}, \quad x_2 = -\frac{Z_2}{N}, \quad x_3 = \frac{Z_3}{N}, \quad x_4 = -\frac{Z_4}{N}$$

Diese vier Ausdrücke haben einen gemeinschaftlichen Nenner N, welcher nach folgender Formel berechnet wird

Digitized by Google

$$N = (a_1b_2 - a_2b_1)(c_3d_4 - c_4d_3) - (a_1c_2 - a_2c_1)(b_3d_4 - b_4d_3) + (a_1d_2 - a_2d_1)(b_3c_4 - b_4c_3) + (b_1c_2 - b_2c_1)(a_3d_4 - a_4d_3) - (b_1d_2 - b_2d_1)(a_3c_4 - a_4c_3) + (c_1d_2 - c_2d_1)(a_3b_4 - a_4b_3)$$

Was die Zähler betrifft; so ist der erste Z_1

$$Z_1 = a_2\left[-b_0(c_3d_4 - c_4d_3) + c_0(b_3d_4 - b_4d_3) - d_0(b_3c_4 - b_4c_3)\right]$$
$$+ b_2\left[a_0(c_3d_4 - c_4d_3) - c_0(a_3d_4 - a_4d_3) + d_0(a_3c_4 - a_4c_3)\right]$$
$$+ c_2\left[-a_0(b_3d_4 - b_4d_3) + b_0(a_3d_4 - a_4d_3) - d_0(a_3b_4 - a_4b_3)\right]$$
$$+ d_2\left[a_0(b_3c_4 - b_4c_3) - b_0(a_3c_4 - a_4c_3) + c_0(a_3b_4 - a_4b_3)\right]$$

Der zweite Zähler Z_2 ergiebt sich aus dem ersten Z_1, indem man den Index 2 mit 1 vertauscht.

Der dritte Zähler Z_3 ergiebt sich aus dem ersten Z_1, indem man die Zeiger 1, 2, 3, 4 resp. mit 3, 4, 1, 2 vertauscht.

Der vierte Zähler Z_4 ergiebt sich aus dem dritten Z_3 durch Vertauschung des Zeigers 3 mit 4. Will man den Zähler Z_4 unmittelbar aus dem ersten Z_1 herstellen; so hat man den Index 4 mit 1 zu vertauschen; die Entwicklung aus Z_3 giebt jedoch Gelegenheit, eine größere Menge schon berechneter Größen zu verwenden.

Schließlich wird man sich behuf Ausführung der fraglichen Rechnung eine Tafel der mehrfach vorkommenden Kombinationen der Größen w_1, w_2, w_3, w_4 etwa in folgender Form anfertigen.

$w_1 = -w_4 = (1+i)a \qquad w_2 = -w_3 = (1-i)a$
$w_1 + w_2 = -(w_3 + w_4) = 2a$
$w_1 + w_3 = -(w_2 + w_4) = 2ai$
$w_1 + w_4 = w_2 + w_3 = 0$
$w_1 - w_2 = w_3 - w_4 = 2ai$
$w_1 - w_3 = w_2 - w_4 = 2a$
$w_1 - w_4 = 2(1+i)a$
$w_2 - w_3 = 2(1-i)a$
$w_1^2 = -w_2^2 = -w_3^2 = w_4^2 = 2a^2i$
$w_1^2 - w_2^2 = w_1^2 - w_3^2 = -(w_2^2 - w_4^2) = -(w_3^2 - w_4^2) = 4$
$w_1^2 - w_4^2 = w_2^2 - w_3^2 = 0$
$w_1w_2 = -w_1w_3 = -w_2w_4 = w_3w_4 = 2a^2$
$-w_1w_4 = w_2w_3 = 2a^2i$
$w_1^2w_2^2 = w_1^2w_3^2 = w_2^2w_4^2 = w_3^2w_4^2 = -w_1^2w_4^2 = -w_2^2w_3^2 = 4a^4$
$-w_1w_2w_3 = w_2w_3w_4 = 2(1-i)a^3$
$-w_1w_2w_4 = w_1w_3w_4 = 2(1+i)a^3$
$w_1^2w_2^2w_3^2 = -w_1^2w_2^2w_4^2 = -w_1^2w_3^2w_4^2 = w_2^2w_3^2w_4^2 = -8a^6i$

Digitized by Google

Schreiten wir jetzt zur Spezialisirung der in unserer Aufgabe liegenden verschiedenen Fälle.

Erster Fall. Die Röhre ist im Anfangspunkte durch ein einfaches Band geschlossen; am Endpunkte dagegen ist sie offen. (Fig. 5.)

Die erste Bedingung für diesen Fall ist, daß für $x = 0$ die Spannung $s = 0$ sei. Dieß giebt nach Gl. (49) die erste Bedingungsgleichung

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = \frac{rq}{b} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

Die zweite Bedingung besteht darin, daß für $x = 0$ das Biegungsmoment des ersten Querschnittes oder der Werth von $\frac{1}{R}$, folglich auch der Werth von $\frac{d^2 s}{dx^2} = 0$ sei. Nach (51) hat man also

$$c_1 w_1^2 + c_2 w_2^2 + c_3 w_3^2 + c_4 w_4^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

Dasselbe gilt vom letzten Querschnitte; es muß also auch für $x = l$ der Werth von $\frac{d^2 s}{dx^2} = 0$ sein. Dieß giebt die dritte Bedingungsgleichung

$$c_1 w_1^2 e^{w_1 l} + c_2 w_2^2 e^{w_2 l} + c_3 w_3^2 e^{w_3 l} + c_4 w_4^2 e^{w_4 l} = 0 \quad (56)$$

Endlich aber ist hier jenseit des Anfangspunktes der Röhre keine äußere Kraft Q wirksam. Die Gleichung (44) besteht also für $Q = 0$. Setzt man darin für s den allgemeinen Ausdruck (49) und integrirt für die Grenzen $x = 0$ und $x = l$; so ergiebt jene Gleichung

$$\left(\frac{d^3 s}{dx^3}\right)_0 = -\frac{4a^4}{w_1} c_1 (e^{w_1 l} - 1) - \frac{4a^4}{w_2} c_2 (e^{w_2 l} - 1) - \frac{4a^4}{w_3} c_3 (e^{w_3 l} - 1) - \frac{4a^4}{w_4} c_4 (e^{w_4 l} - 1)$$

$$= w_1^3 c_1 (e^{w_1 l} - 1) + w_2^3 c_2 (e^{w_2 l} - 1) + w_3^3 c_3 (e^{w_3 l} - 1) + w_4^3 c_4 (e^{w_4 l} - 1)$$

Nimmt man jetzt den Werth von $\left(\frac{d^3 s}{dx^3}\right)_0$, d. h. den Werth von $\frac{d^3 s}{dx^3}$ für $x = 0$ aus (52) und setzt denselben dem vorstehenden Ausdrucke gleich; so erhält man die vierte Bedingungsgleichung

$$c_1 w_1^3 e^{w_1 l} + c_2 w_2^3 e^{w_2 l} + c_3 w_3^3 e^{w_3 l} + c_4 w_4^3 e^{w_4 l} = 0 \quad . \quad (57)$$

Digitized by Google

Aus diesen vier Gleichungen ergeben sich nach den früher mitgetheilten Hülfsformeln die Werthe von c_1, c_2, c_3, c_4 in der Gestalt

$$c_1 = \frac{rq}{2b} \cdot \frac{1 + i - e^{-2al} - ie^{-2ali}}{e^{2al} - e^{-2al} - 2\sin 2al}$$

$$c_2 = \frac{rq}{2b} \cdot \frac{1 - i - e^{-2al} + ie^{2ali}}{e^{2al} - e^{-2al} - 2\sin 2al}$$

$$c_3 = \frac{rq}{2b} \cdot \frac{-1 + i + e^{2al} + ie^{-2ali}}{e^{2al} - e^{-2al} - 2\sin 2al}$$

$$c_4 = \frac{rq}{2b} \cdot \frac{-1 - i + e^{2al} + ie^{2ali}}{e^{2al} - e^{-2al} - 2\sin 2al}$$

Substituirt man diese Werthe in die Formel (49), indem man die kompleren Größen in eine Form bringt, in welcher sich das Reelle vom Imaginären sondert, indem man also eine Größe wie e^{m+ni} in die Form $e^m e^{ni} = e^m(\cos n + i \sin n)$ setzt; so findet man, daß alles Imaginäre verschwindet und daß die Spannung s, welche im Abstande x von dem vorderen verschließenden Ringe im kreisförmigen Querschnitte der Röhre stattfindet, folgenden Werth annimmt.

$$s = \frac{rq}{b}\left\{1 + \frac{(e^{al} + e^{-al})[\sin ax + \sin a(2l-x)] - [e^{al} - e^{-al} + e^{a(2l-x)} - e^{-a(2l-x)}]\cos ax}{e^{2al} + e^{-2al} - 2\sin 2al}\right\} \quad (58)$$

Nach Gl. (1) ist $\frac{rq}{b}$ die Spannung, welche in dieser Röhre stattfinden würde, wenn sie an beiden Enden offen wäre. Der Faktor von $\frac{rq}{b}$ in vorstehender Formel bezeichnet also das Verhältniß, in welchem die Spannung in der mit einem Bande versehenen Röhre zu der Spannung in einer Röhre mit freien Öffnungen steht.

Eine besondere Wichtigkeit hat derjenige Werth der Spannung, welcher an dem offenen Ende der Röhre, also für $x = l$ stattfindet; derselbe ist

$$s = \frac{rq}{b}\left\{1 + \frac{2(e^{al} + e^{-al})\sin al - 2(e^{al} - e^{-al})\cos al}{e^{2al} - e^{-2al} - 2\sin 2al}\right\} \quad (59)$$

Digitized by Google

Für $l = \infty$ wird dieser Ausdruck $= \frac{rq}{b}$, d. h. die Spannung am freien Ende nähert sich mit zunehmender Länge der Röhre demjenigen Werthe, welcher in einer Röhre mit zwei freien Öffnungen allenthalben stattfinden würde.

Diese Annäherung geht aber nicht stetig, sondern periodisch vor sich, indem der zweite Theil des eingeklammerten Faktors in Gl. (59) bald positiv, bald negativ ist. Hieraus ergiebt sich die merkwürdige Thatsache, dass die Spannung s am freien Ende der Röhre je nach der Länge derselben bald größer, bald kleiner ist, als der bei gleichförmiger Ausdehnung einer Röhre mit zwei freien Öffnungen stattfindende Mittelwerth $\frac{rq}{b}$.

Eine solche Oszillation der Spannung s findet aber nicht bloß am offenen Ende verschiedener Röhren, sondern auch in den verschiedenen Punkten ein und derselben Röhre statt. Denn man erkennt leicht, dass der zweite Theil des eingeklammerten Faktors von Gl. (58) bei wachsendem x abwechselnd positiv und negativ wird. Die Perioden sind nicht von gleicher, sondern von variabeler Länge. Übrigens ist diese Periodenlänge an sich sehr klein. Dieß erkennt man daraus, dass die trigonometrische Funktion in Gl. (58) immer ihr Zeichen ändert, sobald sich die Abszisse x um $\frac{\pi}{a}$ ändert. Nach (46) hat aber $\frac{\pi}{a}$ den sehr kleinen Werth $\frac{\pi\sqrt{rb}}{\sqrt[4]{3\alpha}}$, innerhalb dessen die Exponentialgrößen in Gl. (58) sich nur wenig ändern, sodass die Periodenlänge nicht wesentlich von $\frac{\pi\sqrt{rb}}{\sqrt[4]{3\alpha}}$ verschieden sein kann.

In dem vorstehenden Resultate erscheinen auf den ersten Blick zwei Dinge auffallend. Erstens, dass durch Anlegung eines festen Bandes die Spannung an gewissen Stellen der Röhre über denjenigen Betrag hinauswachsen soll, welcher sich mit der Beseitigung des Bandes in der ganzen Röhre gleichförmig einstellen würde: zweitens, dass der Längendurchschnitt der Röhrenwand eine Wellenlinie annehmen soll, derzufolge die Spannung abwechselnd größer und kleiner ist, als der oben bezeichnete Betrag.

Folgende elementare Anschauung ist geeignet, die innere Nothwendigkeit dieser eigenthümlichen Erscheinung zur Erkenntniss zu bringen.

In Fig. 6 sei AB der Längendurchschnitt der Röhrenwand vor der Ausdehnung durch den hydrostatischen Druck und CD die gerade Linie, bis zu welcher sich die Wand ausdehnen würde, wenn die Röhre an beiden Enden offen wäre, sodass also der Linie CD die Spannung $\frac{rq}{b}$ entsprechen würde.

Digitized by Google

Der sehr schmale Streifen CD, welcher der Länge nach aus der Röhrenwand herausgeschnitten ist, wird auf seiner ganzen Länge gleichförmig von zwei einander gleichen, aber direkt entgegengesetzten Kräften angegriffen. Die erste Kraft ist der hydrostatische Überdruck q pro Quadrateinheit, welcher von unten nach oben wirkt; die zweite Kraft ist die Resultante der beiderseitigen Spannungen $\frac{rq}{b}$ pro Quadrateinheit, welche Resultante die Größe q des hydrostatischen Überdruckes hat, aber in entgegengesetzter Richtung von oben nach unten wirkt.

Nehmen wir jetzt an, das vordere Ende der Röhre werde durch ein ringförmiges Band in seine ursprüngliche Lage, also der Anfangspunkt C des fraglichen Streifens durch eine in A angebrachte von oben nach unten wirkende Kraft Q pro Längeneinheit des Röhrenumfanges nach A zurückgeführt. Da sich die Elastizitätskräfte in jedem Querschnitte des Streifens gegenseitig vernichten; so müssen sich die äußerlich auf den Streifen wirkenden Kräfte im Gleichgewichte erhalten: ihr Moment für jeden beliebigen Drehungspunkt muß also gleich null sein. Nimmt man dieses Moment für den Anfangspunkt A; so ist hierfür das Moment der Kraft Q des Bandes null; es muß also das Moment aller hydrostatischen Pressungen q gleich dem Momente aller aus den Spannungen s hervorgehenden Resultanten sein. Die hydrostatischen Pressungen sind genau dieselben, wie wenn das Band nicht vorhanden wäre. Was aber die Spannungen s betrifft; so sind dieselben in dem zunächst auf A folgenden Theile des Streifens wegen der Zurückführung des Punktes C nach A entschieden kleiner als $\frac{rq}{b}$, ihre von oben nach unten wirkenden Resultanten also entschieden kleiner als q. Fände dieser Zustand nur in der ganzen Länge des Streifens statt; so wäre offenbar das Moment der letzteren Spannungen kleiner als das Moment der hydrostatischen Pressungen, also das Gleichgewicht unmöglich. Hieraus erkennt man sofort, daß an irgend einer Stelle die Spannung s nothwendig den Betrag $\frac{rq}{b}$ *überschreiten*, der Streifen also sich *über* die Linie CD erheben muß.

Betrachten wir nunmehr den Streifen von einer solchen Stelle, wo die Spannung größer als $\frac{rq}{b}$ ist, bis zu dem Ende E; so ist klar, daß wenn die Spannung fortwährend größer als $\frac{rq}{b}$ bliebe, also fortwährend ein Übergewicht über den hydrostatischen Druck q behielte, der Streifen unausgesetzt *konkav* gegen die Are gekrümmt sein müßte. Die Fortsetzung einer solchen Krümmung und das immer mehr wachsende Übergewicht des Momentes der Spannung muß aber bei genügender Länge der Röhre den Streifen endlich einmal wieder *unter* die Linie CD herabführen und dann die Krümmung *konver* machen.

Digitized by Google

Eine Wiederholung des letzteren Schlusses führt dann zu der Wellenlinie A E und zur Motivirung des ganzen obigen Gesetzes.

Aus allem Diesen geht hervor, daſs ein Band an einem Ende einer Röhre von geringer Wanddicke keineswegs eine Verstärkung, sondern eine Verschwächung der Röhre erzeugt, indem dadurch die Spannung s an gewissen Stellen immer über den normalen Betrag $\frac{rq}{b}$ gesteigert wird.

Unter solchen Umständen ist es wichtig, das Maß dieser Verschwächung, also das Maximum der Spannung s zu bezeichnen.

Ist die Röhre lang genug, sodaſs mindestens ein Kulminationspunkt in der fraglichen Wellenlinie vorhanden ist; so entspricht dem ersten Kulminationspunkte der größtmögliche Werth von s. Ist die Röhre kürzer; so herrscht die größte Spannung am offenen Ende der Röhre.

Den letzten dieser beiden Fälle betrachten wir zuerst; wir nehmen also an, daſs l ungemein klein sei. Für diese Voraussetzung nimmt der zweite Theil des eingeklammerten Faktors in Gl. (59), wie man durch gehörige Differentiation des Zählers und Nenners findet, den Werth $\frac{1}{2}$ an. Die größte Spannung am offenen Ende der Röhre ist also $= \frac{3}{2} \frac{rq}{b}$, d. h. anderthalbmal so groß, wie wenn das Band nicht vorhanden wäre.

Was den zweiten der erwähnten beiden Fälle betrifft; so würde man die kleinste Abszisse x, wofür die Tangente des Längenschnittes der Röhre parallel zur Axe oder tang $\varphi = 0$, mithin auch $\frac{ds}{dx} = 0$ wird, zu ermitteln und in Gl. (58) zu substituiren haben. Für die Praxis genügt übrigens folgende Betrachtung. Wegen der Wellenform des Längenschnittes wird das Maximum der Spannung einer Abszisse x angehören, welche kleiner ist als $\frac{\pi}{a}$. Dieß ist ein sehr kleiner Werth. Nehmen wir nun an, die Röhre sei von einiger Länge, wie es in der Praxis fast immer der Fall sein wird, nämlich von einer solchen Länge, daſs $2al$ namhaft größer ist als π; so wird in dem Zähler des Bruches in Gl. (58) die Größe $e^{a(2l-x)}$ und im Nenner die Größe e^{2al} alle übrigen Größen bedeutend überwiegen. Ferner ist klar, daſs unter solchen Umständen der Werth der an sich kleinen Größe x keinen wesentlichen Einfluſs auf alle Exponentialgrößen, sondern nur noch auf die trigonometrischen Funktionen äußert. Der in Rede stehende Bruch wird daher seinen größten positiven Werth annehmen, wenn im Zähler das zweite Glied positiv und cos ax am größten, d. h. wenn cos $ax = -1$ wird. Dieß findet statt für $x = \frac{\pi}{a}$. Das Maximum der Spannung liegt also nahezu in

Digitized by Google

der Entfernung $\frac{\pi}{a}$ vom verschließenden Bande und ist mit hinlänglicher Genauigkeit, wenn man im Zähler nur das Glied $e^{2al-\pi}$ und im Nenner nur das Glied e^{2al} beibehält,

$$s = \frac{rq}{b}\left(1 + \frac{1}{e^{\pi}}\right) = \frac{rq}{b}\left(1 + \frac{1}{23}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (60)$$

Hieraus erkennt man, daſs bei Röhren mit sehr dünnen Wänden von einiger Länge die schwächste Stelle, nämlich diejenige, wo die größte Spannung herrscht, nicht etwa an der freien Öffnung, sondern sehr nahe an dem verschließenden Bande liegt und daſs diese Spannung den Mittelwerth, welcher in einer Röhre mit zwei offenen Enden stattfinden würde, wenn auch nicht um Viel, doch um den 23sten Theil übertrifft.

Wir gehen jetzt zur Betrachtung eines anderen Arrangements des Röhrenverschlusses über.

Zweiter Fall. Die Röhre ist im Anfangspunkte durch ein Doppelband geschlossen; am Endpunkte dagegen ist sie offen (Fig. 7).

Für diesen Fall bleiben die drei Bedingungsgleichungen (54), (56), (57) des früheren Falles bestehen. An die Stelle der Gleichung (55), nach welcher früher das Biegungsmoment im Anfangspunkte der Röhre gleich null sein mußte, was jetzt nicht mehr behauptet werden kann, tritt nunmehr aber die Bedingung, daſs die Tangente der Röhrenwand im Anfangspunkte parallel zur Axe oder daſs für $x = o$ auch $\operatorname{tang} \varphi = o$, mithin $\frac{ds}{dx} = o$ sei. Diese Bedingung liefert nach (49) die Gleichung

$$c_1 w_1 + c_2 w_2 + c_3 w_3 + c_4 w_4 = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61)$$

Bestimmt man jetzt aus (54), (56), (57), (61) die vier Koeffizienten c_1, c_2, c_3, c_4 und führt dieselben in (49) ein; so kömmt

$$s = \frac{rq}{b}\left[1 + \frac{1}{(e^{al} + e^{-al})^2 + 4\cos^2 al} \times \right.$$

$$\left\{e^{ax}\left[e^{-2al}(\sin ax - \cos ax) + \sin a(2l-x) - \cos a(2l-x) - 2\cos ax\right]\right.$$

$$\left.\left. - e^{-ax}\left[e^{2al}(\sin ax + \cos ax) + \sin a(2l-x) + \cos a(2l-x) + 2\cos ax\right]\right\}\right] \quad (62)$$

Digitized by Google

Am offenen Ende, also für $x = l$ ist die Spannung

$$s = \frac{rq}{b}\left\{1 - \frac{4\left(e^{al} + e^{-al}\right)\cos al}{\left(e^{al} + e^{-al}\right)^2 + 4\cos^2 al}\right\} \quad . . \quad (63)$$

wofür man auch setzen kann

$$s = \frac{rq}{b}\,\frac{\left(e^{al} + e^{-al} - 2\cos al\right)^2}{\left(e^{al} + e^{-al}\right)^2 + 4\cos^2 al} \quad . . . \quad (64)$$

Für eine Röhre von unendlicher Länge l nimmt die Spannung am offenen Ende den bekannten Mittelwerth $\frac{rq}{b}$ an.

Diese Formeln charakterisiren einen Spannungszustand, welcher in seinen Grundzügen, d. h. in den periodischen Undulationen über und unter den für eine Röhre mit zwei freien Öffnungen gültigen Mittelwerth $\frac{rq}{b}$ dem Zustande ganz ähnlich ist, welchen wir bei dem vorhergehenden Falle kennen gelernt haben.

Auch hier führt der Verschluss der Röhre keine Kräftigung, sondern eine Schwächung herbei. Die schwächste Stelle, d. h. diejenige, wo die größte Spannung herrscht, liegt in der Nähe des verschlossenen Endes. Ist die Röhre äußerst kurz; so ist die Spannung hier, wie im vorhergehenden Falle, in der freien Öffnung am stärksten. Dieselbe überschreitet jedoch in diesem Falle nicht den Mittelwerth $\frac{rq}{b}$: sie ist vielmehr nahezu null, oder genauer

$$s = \frac{rq}{b} \cdot \frac{3a^4l^4}{2\left(3 + a^4l^4\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (65)$$

Wenn die Röhre von einiger Länge ist, sodass $e^{a(2l-x)}$ alle übrigen Exponentialgrößen im Zähler der Formel (62) und e^{2al} alle Größen im Nenner überwiegt; so findet sich bald, dass die Spannung nahezu dann am größten wird, wenn der Ausdruck $-e^{a(2l-x)}(\sin ax + \cos ax)$ positiv und am größten wird. Dieß findet statt für $ax = \frac{5\pi}{4}$, indem alsdann $\sin ax = \cos ax = -\sqrt{\frac{1}{2}}$ wird. Im Abstande $x = \frac{5\pi}{4a}$ ist also die Spannung am größten und sehr nahe

$$s = \frac{rq}{b}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{e^{\frac{5\pi}{4}}}\right) = \frac{rq}{b}\left(1 + \frac{1}{36}\right) \quad . . \quad (66)$$

Eine Röhre mit geringer Wanddicke wird also auch durch das Doppelband nicht gestärkt, sondern geschwächt, wiewohl nicht in

Digitized by Google

demselben Maße, wie durch ein einfaches Band, indem die Spannung am verschlossenen Ende sich jetzt nur um den 36sten Theil über die in einer Röhre mit zwei offenen Enden stattfindenden Spannung erhebt, während dieser Zuwachs für ein einfaches Band den 23sten Theil ausmacht.

Dritter Fall. Die Röhre ist an beiden Enden durch einfache Bänder geschlossen. (Fig. 8.)

In diesem Falle bleiben die Bedingungsgleichungen (54) und (55) bestehen, welche ausdrücken, daß im Anfangspunkte des mehr erwähnten Streifens sowohl die Spannung, wie auch das Biegungsmoment null sei. Hierzu gesellen sich alsdann noch zwei andere Bedingungen, welche ausdrücken, daß die Spannung und das Biegungsmoment auch im Endpunkte der Röhre, also für $x = l$ null sei. Da die Röhre vom Anfangs- und vom Endpunkte her offenbar eine symmetrische Figur annehmen muß; so kann man an die Stelle einer der letzten beiden Bedingungen auch die setzen, daß die Tangente des Streifens in der Mitte der Röhre, also für $x = \frac{1}{2}l$ zur Röhrenare parallel, also $\frac{ds}{dx} = o$ sei. Wir wollen jedoch bei jenen beiden Bedingungen stehen bleiben.

Die erste derselben, daß für $x = l$ die Spannung $s = o$ sei, giebt nach (49)

$$c_1 e^{w_1 l} + c_2 e^{w_2 l} + c_3 e^{w_3 l} + c_4 e^{w_4 l} = \frac{rq}{b} \quad . \quad . \quad (67)$$

Die zweite jener Bedingungen, daß für $x = l$ das Biegungsmoment, also auch $\frac{d^2 s}{dx^2} = o$ sei, giebt nach (51)

$$c_1 w_1^2 e^{w_1 l} + c_2 w_2^2 e^{w_2 l} + c_3 w_3^2 e^{w_3 l} + c_4 w_4^2 e^{w_4 l} = o \quad . \quad . \quad (68)$$

Bestimmt man nun c_1, c_2, c_3, c_4 aus den vier Gleichungen (54), (55), (67), (68) und substituirt ihre Werthe in (49); so erhält man

$$s = \frac{rq}{b}\left[1 - \frac{1}{e^{2al} + e^{-2al} - 2\cos 2al} \times \right.$$

$$\left\{\left(e^{a(2l-x)} + e^{-a(2l-x)}\right)\cos ax + \left(e^{a(l+x)} + e^{-a(l+x)}\right)\cos a(l-x)\right.$$

$$\left. \left. - \left(e^{a(l-x)} + e^{-a(l-x)}\right)\cos a(l+x) - \left(e^{ax} + e^{-ax}\right)\cos a(2l-x)\right\}\right] \quad (69)$$

Digitized by Google

In der Mitte der Röhre, also für $x = \frac{l}{2}$ ist die Spannung

$$s = \frac{rq}{b}\left\{1 - 2 \cdot \frac{\left(e^{\frac{3al}{2}} + e^{\frac{-3al}{2}}\right)\cos\frac{al}{2} - \left(e^{\frac{al}{2}} + e^{\frac{-al}{2}}\right)\cos\frac{3al}{2}}{e^{2al} + e^{-2al} - 2\cos 2al}\right\} \quad (70)$$

Wenn die Röhre unendlich lang ist, wird diese Spannung in der Mitte gleich dem Mittelwerthe $\frac{rq}{b}$, welcher in einer Röhre mit zwei offenen Enden stattfindet.

Die Periodizität der Spannung und die Wellenform des Längendurchschnittes waltet auch bei der hier betrachteten Röhre in der Weise ob, daß die Spannung abwechselnd größer und kleiner ist, als der Mittelwerth $\frac{rq}{b}$, sodaß also auch der Verschluß durch zwei Bänder an den Enden einer Röhre von geringer Wanddicke keine Verstärkung, sondern eine Verschwächung herbeiführt, sobald die Länge der Röhre nur einen irgend namhaften Werth hat.

Die schwächste Stelle der Röhre liegt hier, wie im ersten Falle, nahezu in der sehr geringen Entfernung $x = \frac{\pi}{a}$ vom Anfangs- oder Endpunkte. Die Spannung an dieser Stelle beträgt sehr nahe

$$s = \frac{rq}{b}\left(1 + \frac{1}{e^{\pi}}\right) = \frac{rq}{b}\left(1 + \frac{1}{23}\right) \quad . \quad (70)$$

wie im ersten Falle, sodaß also bei Röhren mit dünnen Wänden von einiger Länge der Verschluß mittelst einfacher Bänder an beiden Enden ebenso ungünstig wirkt, wie der Verschluß an einem Ende.

Vierter Fall. Die Röhre ist an beiden Enden durch Doppelbänder geschlossen. (Fig. 9.)

Die vier in Frage kommenden Bedingungen bestehen jetzt darin, daß die Spannung im Anfangs- und Endpunkte, also für $x = o$ und für $x = l$ null sei, was die beiden Gleichungen (54) und (67) ergiebt, und ferner, daß die Tangente der Röhrenwand in jenen beiden Punkten parallel zur Röhrenaxe, daß also $\frac{ds}{dx} = o$ sei. Die erste der letzten beiden Bedingungen führt zu der Gl. (61) und die zweite für $x = l$ wegen (50) zu der Gleichung

$$c_1 w_1 e^{w_1 l} + c_2 w_2 e^{w_2 l} + c_3 w_3 e^{w_3 l} + c_4 w_4 e^{w_4 l} = 0 \quad . \quad . \quad (71)$$

Digitized by Google

Die Größen c_1, c_2, c_3, c_4 sind also aus den vier Gleichungen (54), (67), (61), (71) zu bestimmen und in (49) zu substituiren. Dieß giebt

$$s = \frac{rq}{b}\left[1 + \frac{1}{\left(e^{al} - e^{-al}\right)^2 - 4\sin^2 al} \times \right.$$

$$\left\{e^{ax}\left[e^{-2al}(\sin a x - \cos a x) - e^{al}(\sin a(l-x) + \cos a(l-x))\right.\right.$$

$$- e^{-al}(\sin a(l+x) + \cos a(l+x) - 2\cos a(l-x))$$

$$\left. + \sin a(2l-x) - \cos a(2l-x) + 2\cos a x\right]$$

$$- e^{-ax}\left[e^{2al}(\sin a x + \cos a x) - e^{-al}(\sin a(l-x) - \cos a(l-x))\right.$$

$$- e^{al}(\sin a(l+x) - \cos a(l+x) + 2\cos a(l-x))$$

$$\left.\left. + \sin a(2l-x) + \cos a(2l-x) - 2\cos a x\right]\right\}\Bigg] \tag{72}$$

In der Mitte der Röhre, für $x = \frac{l}{2}$ ist die Spannung

$$s = \frac{rq}{b}\left[1 - \frac{2}{\left(e^{al} - e^{-al}\right)^2 - 4\sin^2 al} \times \right.$$

$$\left\{e^{\frac{3al}{2}}\left(\sin\frac{al}{2} + \cos\frac{al}{2}\right) - e^{\frac{-3al}{2}}\left(\sin\frac{al}{2} - \cos\frac{al}{2}\right)\right.$$

$$\left.\left. - e^{\frac{al}{2}}\left(\sin\frac{3al}{2} - \cos\frac{3al}{2} + 2\cos\frac{al}{2}\right) + e^{\frac{-al}{2}}\left(\sin\frac{3al}{2} + \cos\frac{3al}{2} - 2\cos\frac{al}{2}\right)\right\}\right]. \tag{73}$$

In einer Röhre von unendlicher Länge wird die Spannung in der Mitte gleich der in einer Röhre mit zwei offenen Enden stattfindenden Spannung $\frac{rq}{b}$.

Die schon früher erläuterten Gesetze des periodischen Wechsels der Spannung haben auch hier Gültigkeit. Eine Röhre mit dünner Wand von einiger Länge wird also auch durch den vollkommensten Verschluss an den beiden Enden nicht gestärkt, sondern geschwächt. Die größte Spannung in einer solchen Röhre herrscht nahe an den verschlossenen Enden etwa in der Entfernung $x = \frac{5\pi}{4a}$, wie im zweiten Falle, und ist auch hier nahezu

Digitized by Google

$$s = \frac{rq}{b}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{e^{\frac{5\pi}{4}}}\right) = \frac{rq}{b}\left(1 + \frac{1}{36}\right) \quad \ldots (74)$$

Allgemeine Charakterisirung der übrigen Fälle.

Es wird nicht schwer sein, die Bedingungsgleichungen für alle übrigen Fälle, welche möglicherweise vorkommen können, aufzustellen. In der Praxis wird es sich jedoch in diesen Fällen selten um Röhren mit sehr dünnen Wänden handeln: wir verzichten daher auf die spezielle Ausführung der Rechnung und begnügen uns zur allgemeinen Orientirung mit folgenden Bemerkungen.

Der Fall, wo eine Röhre an beiden Enden offen, aber in der Mitte mit einem Bande umgeben ist, fällt mit dem vorhin behandelten zweiten Falle zusammen, wenn man unter l die halbe Länge der neuen Röhre versteht und den Anfangspunkt der Abszissen in die Mitte der Röhre verlegt.

Den Fall darzustellen, wo eine Röhre an beiden Enden und in der Mitte mit einfachen Bändern umgeben wäre, kann man, indem man eine Hälfte der Röhre ins Auge fasst, auf den Fall zurückführen, wo eine Röhre an dem einen Ende mit einem Doppelbande und an dem anderen mit einem einfachen Bande versehen ist.

Allgemein erfordert der Fall, wo mehrere einfache oder Doppelbänder an beliebigen Stellen gegeben wären, eine Zerlegung der Integrale für die einzelnen Partien der Röhre zwischen je zwei Bändern, indem man, ähnlich wie in der Theorie gebogener Stäbe, die Forderung ausdrückt, dass die Richtung der Kurve des Längenschnittes für zwei benachbarte Röhrenstücke in dem gemeinschaftlichen Grenzpunkte dieselbe sein müsse.

Ist die Röhre nicht auf ihre ganze Länge mit derselben Flüssigkeit gefüllt, oder sind überhaupt auf dieselbe streckenweise innerlich oder äußerlich Flüssigkeiten mit verschiedenen Pressungen wirksam; so ist eine der eben gedachten ähnliche Zerlegung vorzunehmen.

Endlich ist es auch leicht, den Fall zu berücksichtigen, wo Bänder um die Röhre angebracht sind, welche nicht gerade den Effekt hervorbringen, dass daselbst der Querschnitt in seiner natürlichen Form, also die Spannung auf dem Nullwerthe erhalten werde. Statt der hierzu erforderlichen Kräfte Q können auch ganz beliebige in Bändern ringförmig wirkende Kräfte von gegebenem Betrage in Rechnung gestellt werden, welche eine gewisse Verengung oder Erweiterung der Röhre an den betreffenden Stellen bewirken. So kann man z. B. die Wirkung eines Bandes, welches einen gegebenen Druck Q ausübt, oder welches den Querschnitt auf ein gegebenes Maß verengt oder erweitert, auf eine Röhre untersuchen, welche gar keinen hydrostatischen Druck auszuhalten hat.

Die früher erläuterten allgemeinen charakteristischen Eigenschaften, welche in der Wellenform des Längenschnittes und in dem periodischen Steigen und

Digitized by Google

Fallen der Spannung s über und unter den für Röhren ohne Bänder gültigen Mittelwerth $\frac{rq}{b}$ bestehen, werden sich in allen diesen Fällen wiederholen. Dieß ist für die hier betrachteten Röhren mit dünnen Wänden das Wesentlichste; eine spezielleren Untersuchung der angedeuteten einzelnen Fälle wird kein praktisches Bedürfniss sein. Umsomehr aber scheint es nothwendig, jetzt das Wesen solcher Röhren zu untersuchen, welche eine beliebige Wanddicke haben und zugleich mit Bändern versehen oder von anderen ungleichmäßig wirkenden Kräften angegriffen sind.

4. Röhren

mit geschlossenen Enden und Bändern, unter Voraussetzung einer beliebigen Wanddicke.

Indem wir die Untersuchung des vorigen Abschnittes wieder aufnehmen, machen wir jetzt die Voraussetzung, dass die Röhrenwand eine beliebige Dicke habe. Unter solchen Umständen spielt der in der Richtung des Radius r sich erzeugende Druck eine wesentliche Rolle, indem derselbe eine Kompression des Materials erzeugt, welche ihrerseits das Gesetz der Ausdehnung jeder elementaren Schale der Röhrenwand und damit die darin in der Richtung des Kreisumfanges herrschende Spannung s modifizirt.

Es sei

l die Länge der Röhre,

r_0, r_1, r resp. der innere, der äußere und ein beliebiger Radius,

p_0, p_1, p resp. der innere, der äußere und der im Endpunkte des Radius r am Ende der Abszisse x herrschende Druck pro Quadrateinheit,

Q_0, Q_1, Q resp. der Druck, welchen ein um die Röhre gelegtes Band in der Richtung des Radius pro Längeneinheit des Umfanges auf die Schale resp. vom Radius r_0, r_1, r ausübt, sodass also Q_1 der Gesammtwirkung des Bandes auf den äußeren Umfang der Röhre entspricht,

c die Abszisse für ein solches Band,

s_0, s_1, s resp. die Spannung der ringförmigen Fiber vom Radius r_0, r_1, r am Ende der Abszisse x,

ϱ_0, ϱ_1, ϱ resp. die Vergrößerung des Radius r_0, r_1, r am Ende der Abszisse x,

φ_0, φ_1, φ resp. der Neigungswinkel der Tangente des Längenschnittes einer Schale vom Radius r_0, r_1, r am Ende der Abszisse x,

Digitized by Google

R_0, R_1, R resp. der daselbst bestehende Krümmungshalbmesser des Längenschnittes,

r_2, p_2, s_2, ϱ_2, φ_2, R_2 die betreffenden Größen für die durch den Schwerpunkt eines Streifens von ungemein kleinem Zentriwinkel gehende Faser,

E der Elastizitätsmodel in der Richtung eines kreisförmigen Querschnittes, welcher auch gleich dem in der Richtung des Radius herrschenden angesehen wird,

E_1 der Elastizitätsmodel in der Längenrichtung der Röhre,

α das Verhältniß $\frac{E}{E_1}$, welches für Metalle oder andere nach allen Richtungen homogene Materialien $= 1$ ist,

t die Kraft pro Flächeneinheit, womit der der Abszisse x entsprechende ringförmige Querschnitt einer unendlich dünnen Schale vom Radius r auf seinem benachbarten Querschnitte nach außen oder nach innen abzugleiten oder sich abzuscheren strebt, eine Kraft, welche positiv gedacht werden soll, wenn sie die Endfläche der Schale von der Länge x von innen nach außen affizirt, wodurch natürlich die Anfangsfläche einer im Endpunkte der Abszisse x beginnenden Schale in entgegengesetzter Richtung, also von außen nach innen angegriffen wird.

t', t'' die in der Anfangs- oder Endfläche der Röhre, also für $x = o$ und $x = l$ im Abstande r herrschenden Werthe der Abscherungskraft t, welche das Resultat gewisser an den Enden der Röhre angebrachten äußeren Kräfte sind.

Denken wir uns aus der Röhrenwand der Länge nach einen Streifen mit paralleltrapezförmigem Querschnitte herausgeschnitten, dessen Seitenflächen den sehr kleinen Winkel 2ω miteinander einschließen, und betrachten wir die Kräfte, welche auf ein Stück dieses Streifens wirken, das im Endpunkte der Abszisse x beginnt und sich von da bis ans äußerste Ende der Röhre erstreckt. Diese Kräfte sind folgende.

1) In direkter Richtung des Radius von innen nach außen der innere hydrostatische Druck $2\omega r_0 p_0 (l - x)$ und in entgegengesetzter Richtung der äußere hydrostatische Druck $2\omega r_1 p_1 (l - x)$, welche beide zusammen die von innen nach außen wirkende Kraft

$$2\omega (r_0 p_0 - r_1 p_1) (l - x)$$

darstellen.

2) Im Umfange einer Schale vom Radius r und von der Wandicke dr wirkt normal gegen beide Seiten des Streifens die Spannung s, woraus eine Resultante, in der Richtung des Radius von außen nach innen wirkend, hervorgeht, welche für jedes Längenelement dx gleich $2s \sin\omega\, dr\, dx$ oder

Digitized by Google

wegen der Kleinheit des Winkels ω gleich $2\omega s\,dr\,dx$ ist. Für die ganze Dicke des Streifens ist diese Kraft pro Längenelement dx gleich $2\omega\,dx\int_{r_0}^{r_1} s\,dr$. Für die ganze Länge des Streifens hat man also die von außen nach innen wirkende Kraft

$$2\omega\int_x^l dx\int_{r_0}^{r_1} s\,dr$$

3) Irgend ein um die Röhre gelegtes Band erzeugt auf den Streifen von außen nach innen die Kraft $2\omega r_1 Q_1$. Die Gesammtpressung aller jenseit des Endpunktes der Abziffe x angebrachten Bänder ist daher

$$2\omega r_1 \Sigma_x^l Q_1$$

4) Die Elastizitätskräfte, welche, aus der Biegung des Streifens resultirend, in der vorderen Stirnfläche desselben wirken und parallel zur Röhrenare gerichtet sind.

5) Die in derselben Stirnfläche des Streifens in der Richtung des Radius wirkende Abscherungskraft, welche für jedes Flächenelement dieser Stirnfläche $2\omega r\,dr\,t$, für die ganze Stirnfläche also den Werth

$$2\omega\int_{r_0}^{r_1} t\,r\,dr$$

hat, ein Werth, welcher positiv ist, wenn die Abscherungskraft von außen nach innen wirkt.

Endlich die in der Endfläche des Streifens am Ende der Röhre wirkende Abscherungskraft $2\omega\int_{r_0}^{r_1} t''\,r\,dr$.

Die dem Gleichgewichte entsprechende Summengleichung ist hiernach, wenn man durch 2ω dividirt,

$$(r_0p_0 - r_1p_1)(1-x) - \int_x^l dx\int_{r_0}^{r_1} s\,dr - r_1\Sigma_x^l Q_1 - \int_{r_0}^{r_1} t\,r\,dr + \int_{r_0}^{r_1} t''\,r\,dr = 0 \qquad (75)$$

Für $x = o$ umfaßt das Summenzeichen Σ die Wirkung aller von Bändern

Digitized by Google

herrührenden Kräfte, und da in der vorderen Endfläche die Abscherungskraft t = o ist; so hat man

$$(r_o p_o - r_1 p_1)(l-x) - \int_o^l dx \int_{r_o}^{r_1} s\,dr - r_1 \Sigma Q_1 - \int_{r_o}^{r_1} t' r\,dr + \int_{r_o}^{r_1} t'' r\,dr = 0 \qquad (76)$$

Die Momentengleichung ergiebt sich folgendermaßen.

ad 1) Das Moment des auf den Streifen von der Länge l — x wirkenden inneren und äußeren hydrostatischen Druckes, wenn man den Anfangspunkt des Streifens am Ende der Abszisse x zum Drehungspunkte annimmt, ist

$$2\omega (r_o p_o - r_1 p_1)(l-x) \cdot \frac{l-x}{2} = \omega (r_o p_o - r_1 p_1)(l-x)^2$$

ad 2) Das Moment der aus den beiderseitigen Spannungen s in der ganzen Länge l — x des Streifens hervorgehenden Resultante ist, wenn man den Nullpunkt zum Drehungspunkte nimmt,

$$2\omega \int_x^l x\,dx \int_{r_o}^{r_1} s\,dr$$

wenn man aber den Anfangspunkt des Streifens am Ende der Abszisse x zum Drehungspunkte nimmt und gleichzeitig das Zeichen dieses Momentes, dessen Drehungsrichtung dem ad 1 aufgestellten entgegengesetzt ist, umkehrt; so ist jenes Moment

$$-2\omega \int_x^l x\,dx \int_{r_o}^{r_1} s\,dr + 2\omega x \int_x^l dx \int_{r_o}^{r_1} s\,dr$$

ad 3) Das Moment der von den Bändern erzeugten Kräfte für den Endpunkt der Abszisse x als Drehungspunkt ist

$$-2\omega r_1 \Sigma_x^l (c-x) Q_1$$

ad 4) Da alle auf den Streifen angebrachten Kräfte perpendikular auf seiner Länge stehen; so geht die neutrale Fiber durch den Schwerpunkt des Querschnittes, und zwar können wir die Lage dieses Schwerpunktes bis auf eine zu vernachlässigende Größe genau nach den Dimensionen bestimmen, welche in dem natürlichen, durch die Pressungen p noch nicht afficirten Querschnitte stattfinden, indem durch diese Pressungen und durch die hieraus hervorgehende äußerst geringe Verkleinerung der Flächenelemente des Querschnittes die Elastizitätskräfte selbst gar nicht geändert werden, sondern nur deren relative Abstände oder Hebelarme eine Änderung erleiden, welche übrigens so unbedeutend ist, daß sie vernachlässigt werden kann.

Digitized by Google

Nun bemerke ich zunächst, daß der Abstand des Schwerpunktes des paralleltrapezförmigen Querschnittes von der Röhrenare folgenden Werth hat

$$r_s = \frac{2}{3} \frac{r_1^3 - r_0^3}{r_1^2 - r_0^2} \quad . \quad . \quad . \quad (77)$$

Obgleich jede zur neutralen Fiber parallele Schicht des Streifens wegen der mit der Entfernung dieser Schicht vom Schwerpunkte variirenden Pressung p eine andere Biegungskurve annimmt; so ist doch die Abweichung dieser Kurven von derjenigen, welche der neutralen Fiber zukommt, so unerheblich, daß wir dieselben bei der Bestimmung des Biegungsmomentes als einander parallel betrachten und die Annahme machen können, daß der Krümmungsmittelpunkt der neutralen Fiber der gemeinschaftliche Krümmungsmittelpunkt für alle Fibern sei.

Unter diesen Umständen ist das Biegungsmoment oder das Moment der Elastizitätskräfte in der vorderen Stirnfläche des Streifens in Beziehung zur neutralen Fiber als Drehungsare $\frac{E_1 J}{R_2}$, worin J das Trägheitsmoment des Querschnittes in Beziehung zu einer durch den Schwerpunkt gehenden Are und R_2 der Krümmungshalbmesser der durch diesen Schwerpunkt gehenden Fiber ist.

Nun findet man für dieses Trägheitsmoment

$$J = \frac{\omega}{18} \frac{(r_1 - r_0)^3 (r_1^2 + 4 r_1 r_0 + r_0^2)}{r_1 + r_0}$$

Ferner hat man bei der hier vorausgesetzten sehr geringen Biegung jeder Fiberschicht für den umgekehrten Werth des Krümmungshalbmessers R_2 bekanntermaßen

$$\frac{1}{R_2} = \frac{d^2 \varrho_2}{d x^2}$$

wobei eine konvere Krümmung gegen die Röhrenare gedacht und unter ϱ_2 die Verrückung des Schwerpunktes des Querschnittes des betrachteten Streifens verstanden wird. Wäre die Krümmung konkav, sodaß $-\frac{1}{R_2}$ statt $\frac{1}{R_2}$ zu nehmen wäre; so ändert sich das Zeichen von $\frac{d^2 \varrho_2}{d x^2}$ von selbst, sodaß der Ausdruck

$$\frac{E_1 \omega}{18} \frac{(r_1 - r_0)^3 (r_1^2 + 4 r_1 r_0 + r_0^2)}{r_1 + r_0} \frac{d^2 \varrho_2}{d x^2}$$

für das Biegungsmoment in den späteren Formeln eine allgemeine Gültigkeit behält.

ad 5) Das Moment der in der vorderen Stirnfläche des Streifens perpendikular auf der Längenrichtung desselben wirkenden Abscherungskraft ist null. Dagegen ist das Moment der in der hinteren Endfläche wirkenden Abscherungskraft

$$2 \omega (l - x) \int_{r_0}^{r_1} l'' r \, d r$$

Digitized by Google

Die gesuchte Momentengleichung ist demnach, indem wir mit 2ω dividiren,

$$\frac{E_1}{36}\,\frac{(r_1-r_0)^3\,(r_1^2+4\,r_1\,r_0+r_0^2)}{r_1+r_0}\,\frac{d^2\rho_x}{dx^2}\;=$$

$$\frac{1}{2}\,(r_0\,p_0-r_1\,p_1)\,(1-x)^2-\int_x^1 x\,dx\int_{r_0}^{r_1} s\,dr+x\int_x^1 dx\int_{r_0}^{r_1} s\,dr$$

$$-\,r_1\,\Sigma_x^1\,(c-x)\,Q_1+(1-x)\int_{r_0}^{r_1} t''\,r\,dr \quad . \quad . \quad . \quad (78)$$

Die vorstehende Gleichung bezieht sich auf das Gleichgewicht der Kräfte, welche einen Streifen D E J H (Fig. 10) affiziren, dessen Länge $DE = 1-x$ ist, während seine Höhe $DH = r_1 - r_0$ sich durch die ganze Dicke der Röhrenwand erstreckt. Um die nöthige Zahl von Bestimmungsgleichungen zu erhalten, müssen wir jetzt noch das Gleichgewicht derjenigen Kräfte untersuchen, welche auf einen Streifen D E G F wirken, welcher dieselbe Länge $DE = 1-x$ wie der frühere, aber eine beliebige Höhe $DF = r - r_0$ hat.

Außer den normal gegen die Länge dieses Streifens gerichteten Kräften wirken auf denselben parallel zu der Längenrichtung die Elastizitätskräfte in der Stirnfläche D F und außerdem eine Abscherungskraft in der Fläche F G, vermöge welcher die beiden Theile D E G F und F G J H auf einander zu gleiten streben. Diese letztere Abscherungskraft ist offenbar so groß, wie die Summe aller auf den Theil D F oder auf den Theil F H des Querschnittes des Streifens wirkenden Elastizitätskräfte (welche letzteren beiden einander gleich und entgegengesetzt sind).

Die Summen- und die Momentengleichung für das Gleichgewicht an dem Körper D E G F findet sich folgendermaßen, indem wir die Momente in Beziehung zum Drehungspunkte F nehmen.

1) Gegen die Fläche D E wirkt von unten nach oben der hydrostatische Druck $2\omega r_0 p_0 (1-x)$. Das Moment desselben in Beziehung zum Punkte F ist

$$2\omega r_0 p_0 (1-x)\,\frac{1-x}{2} = \omega r_0 p_0 (1-x)^2$$

2) In der oberen Fläche F G wirkt von außen nach innen auf jedes Flächenelement $2\omega r\,dx$ der Druck $2\omega r p\,dx$, im Ganzen also der Druck $2\omega r\int_x^1 p\,dx$. Das Moment desselben vom Anfangspunkte K der Röhre aus würde $2\omega r\int_x^1 p\,x\,dx$ sein; vom Endpunkte F der Abszisse x aus ist derselbe also, wenn man zugleich wegen der Wirkung von außen nach innen das Zeichen umkehrt,

$$-\,2\omega r\int_x^1 p\,x\,dx+2\omega r x\int_x^1 p\,dx$$

Digitized by Google

3) Das Moment der von außen nach innen gerichteten Resultante $2\omega\int_x^l dx\int_{r_0}^r s\,dr$ der auf die Seitenflächen des Streifens DEGF wirkenden Spannungen s ist, wie man sofort aus dem weiter oben für die ganze Höhe DH ermittelten Ausdrucke abstrahiren kann,

$$-2\omega\int_x^l x\,dx\int_{r_0}^r s\,dr+2\omega x\int_x^l dx\int_{r_0}^r s\,dr$$

4) Wären irgendwo in dem Körper DEGF Kräfte Q angebracht, welche wie die von ringförmigen Bändern herrührenden wirken; so hätte man für deren Moment

$$-2\omega r\Sigma_x^l (c-x)\,Q$$

5) Was die Elastizitätskräfte in der Stirnfläche DF betrifft; so wirkt, da r_2 den Abstand CS des Schwerpunktes S des Querschnittes DH von der Röhrenare C bezeichnet, auf jedes Höhenelement $2\omega r\,dr$ dieses Querschnittes die Elastizitätskraft $2\omega r\,dr\,\frac{r_2-r}{R_2}E_1$. Die Summe aller dieser Kräfte für die Fläche DF ist

$$\frac{2\omega E_1}{R_2}\int_{r_0}^r (r_2-r)\,r\,dr$$

Das Moment dieser Kraft für den Drehungspunkt C ist

$$\frac{2\omega E_1}{R_2}\int_{r_0}^r (r_2-r)\,r^2\,dr$$

Für den Drehungspunkt F ist dasselbe mithin

$$\frac{2\omega E_1 r}{R_2}\int_{r_0}^r (r_2-r)\,r\,dr-\frac{2\omega E_1}{R_2}\int_{r_0}^r (r_2-r)\,r^2\,dr$$

und zwar wirkt dieses Moment, wenn R_2 positiv, d. h. die Krümmung der Röhrenwand für die Abszisse x konver ist, im entgegengesetzten Sinne wie der innere hydrostatische Druck gegen die Fläche DE.

6) In der vorderen Stirnfläche des Streifens wirkt die Abscherungskraft

$$-2\omega\int_{r_0}^r t\,r\,dr$$

deren Moment in Beziehung zum Punkte F null ist.

Digitized by Google

In der hinteren Stirnfläche wirkt die Abscherungskraft

$$2\omega \int_{r_0}^{r} t'' r \, dr$$

deren Moment in Beziehung zum Punkte F

$$2\omega (l - x) \int_{r_0}^{r} t'' r \, dr$$

ist.

Die gesuchte Summengleichung ist hiernach, wenn man mit 2ω dividirt,

$$r_0 p_0 (l-x) - r \int_x^l p \, dx - \int_x^l dx \int_{r_0}^{r} s \, dr - r \Sigma_x^l (c-x) Q - \int_{r_0}^{r} t r \, dr + \int_{r_0}^{r} t'' r \, dr = 0 \tag{79}$$

und die Momentengleichung

$$\frac{E_1 r}{R_0} \int_{r_0}^{r} (r_2 - r) r \, dr - \frac{E_1}{R_2} \int_{r_0}^{r} (r_2 - r) r^2 \, dr =$$

$$\frac{r_0 p_0 (l-x)^2}{2} - r \int_x^l p x \, dx + r x \int_x^l p \, dx - \int_x^l x \, dx \int_{r_0}^{r} s \, dr$$

$$+ x \int_x^l dx \int_{r_0}^{r} s \, dr - r \Sigma_x^l (c-x) Q + (l-x) \int_{r_0}^{r} t'' r \, dr \tag{80}$$

Mit den obigen Gleichungen, welche die statischen Gleichgewichtsbedingungen enthalten, sind folgende zwei Beziehungen zu verbinden, welche die den Spannungen und Druckkräften entsprechenden Formveränderungen darstellen.

Die erste dieser Beziehungen ist die bekannte Relation $\frac{\varrho}{r} = \frac{s}{E}$ oder

$$\varrho = \frac{r s}{E} \qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \tag{81}$$

welche, wie früher (siehe Gl. 42 und 17), die Abhängigkeit zwischen der Spannung s und der dadurch bewirkten Erweiterung irgend einer konzentrischen Schale ausdrückt.

Die zweite Beziehung ist die ebenfalls früher schon (in Gl. 16) aufgestellte Relation

$$\frac{d \varrho}{d r} = - \frac{p}{E} \qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . \tag{82}$$

welche die Abhängigkeit zwischen dem radialen Drucke p und der dadurch erzeugten Verkürzung des Radius darstellt.

Digitized by Google

Um aus den aufgestellten Gleichungen die Lösung unseres Problems zu gewinnen, differentiiren wir Gl. (78) zweimal hintereinander für x. Die erste Differentiation giebt

$$\frac{E_1}{36}\ \frac{(r_1-r_0)^3\,(r_1^2+4\,r_1\,r_0+r_0^2)}{r_1+r_0}\ \frac{d^3\varrho_2}{dx^3}\ =$$

$$-(r_0\,p_0-r_1\,p_1)\,(l-x)+\int_x^l dx\int_{r_0}^{r_1} s\,dr+r_1\,\Sigma_x^l Q_1-\int_{r_0}^{r_1} t''\,r\,dr\quad..\quad(83)$$

Diese Differentiation bedeutet das Zurückgehen von dem Streifen D E J H von der Länge $l-x$ zu einem Längenelemente dieses Streifens von derselben Höhe D H, aber von der ungemein kleinen Länge dx.

Die zweite Differentiation giebt

$$\frac{E_1}{36}\ \frac{(r_1-r_0)^3\,(r_1^2+4\,r_1\,r_0+r_0^2)}{r_1+r_0}\ \frac{d^4\varrho_2}{dx^4}=r_0\,p_0-r_1\,p_1-\int_{r_0}^{r_1} s\,dr \qquad (84)$$

Jetzt differentiiren wir die Gl. (80) zunächst für r. Dieß giebt

$$\frac{E_1}{R_2}\int_{r_0}^{r}(r_0-r)\,r\,dr=$$

$$-\int_x^l\left(r\frac{dp}{dr}+p\right)x\,dx+x\int_x^l\left(r\frac{dp}{dr}+p\right)dx-\int_x^l s\,x\,dx+x\int_x^l s\,dx$$

$$-\Sigma_x^l(c-x)\,Q+(l-x)\,t''\,r$$

oder wenn man das Integral auf der linken Seite ausführt, also mit Rücksicht auf Gleichung (77)

$$\int_{r_0}^{r}(r_0-r)\,r\,dr=r_0\cdot\frac{r^2-r_0^2}{2}-\frac{r^3-r_0^3}{3}=$$

$$=\frac{(r_1^3-r_0^3)\,(r^2-r_0^2)-(r_1^2-r_0^2)\,(r^3-r_0^3)}{3\,(r_1^2-r_0^2)}$$

und außerdem $\frac{1}{R_2}=\frac{d^2\varrho_2}{dx^2}$ setzt,

$$\frac{E_1}{3}\ \frac{(r_1^3-r_0^3)\,(r^2-r_0^2)-(r_1^2-r_0^2)\,(r^3-r_0^3)}{r_1^2-r_0^2}\ \frac{d^2\varrho_2}{dx^2}=$$

$$-\int_x^l\left(r\frac{dp}{dr}+p\right)x\,dx+x\int_x^l\left(r\frac{dp}{dr}+p\right)dx-\int_x^l s\,x\,dx+x\int_x^l s\,dx$$

$$-\Sigma_x^l(c-x)\,Q+(l-x)\,t''\,r\quad.....\quad(85)$$

Digitized by Google

Diese Differentiation stellt die Rekursion von dem Körper D E G F zu dem Höhenelemente desselben von derselben Länge $l - x$, aber von ungemein geringer Höhe dr dar.

Jetzt differentiiren wir Gl. (85) zweimal für x. Die erste Differentiation giebt

$$\frac{E_1}{3} \frac{(r_1^3 - r_0^3)(r^2 - r_0^2) - (r_1^2 - r_0^2)(r^3 - r_0^3)}{r_1^2 - r_0^2} \frac{d^3 \varrho_2}{dx^3} =$$

$$\int_x^l \left(r \frac{dp}{dr} + p \right) dx + \int_x^l s\, dx + \sum_x^l Q - l'' r \quad . \quad . \quad (86)$$

Diese Differentiation entspricht einem Übergange von dem oben erwähnten Höhenelemente zu einem Längenelemente desselben, also zu einem Körpertheilchen von unendlich kleiner Höhe dr und unendlich kleiner Länge dx.

Die zweite Differentiation giebt

$$\frac{E_1}{3} \frac{(r_1^3 - r_0^3)(r^2 - r_0^2) - (r_1^2 - r_0^2)(r^3 - r_0^3)}{r_1^2 - r_0^2} \frac{d^4 \varrho_2}{dx^4} =$$

$$- \left(r \frac{dp}{dr} + p + s \right) \quad . \quad . \quad . \quad (87)$$

Wir gehen nun darauf aus, die Größen ϱ und p zu eliminiren und eine Beziehung zwischen s, r und x herzustellen. Zu dem Ende entnehmen wir aus (81) die Beziehung

$$\frac{d\varrho}{dr} = \frac{1}{E} \left(r \frac{ds}{dr} + s \right)$$

und wenn wir dieselbe mit (82) vergleichen

$$p = - \left(r \frac{ds}{dr} + s \right) \quad . \quad . \quad . \quad (88)$$

woraus zugleich folgt

$$\frac{d\varrho}{dr} = - \left(r \frac{d^2 s}{dr^2} + 2 \frac{ds}{dr} \right)$$

Außerdem hat man wegen (81)

$$\frac{d\varrho}{dx} = \frac{r}{E} \frac{ds}{dx} \qquad \frac{d^2\varrho}{dx^2} = \frac{r}{E} \frac{d^2 s}{dx^2}$$

$$\frac{d^3\varrho}{dx^3} = \frac{r}{E} \frac{d^3 s}{dx^3} \qquad \frac{d^4\varrho}{dx^4} = \frac{r}{E} \frac{d^4 s}{dx^4}$$

und demnach für die neutrale Fiber

$$\frac{d^4 \varrho_2}{dx^4} = \frac{r_2}{E} \frac{d^4 s_2}{dx^4} = \frac{2(r_1^3 - r_0^3)}{3E(r_1^2 - r_0^2)} \frac{d^4 s_2}{dx^4}$$

Digitized by Google

Durch diese Werthe werden die Gleichungen (84) und (87)

$$\frac{1}{54}\,\frac{E_1}{E}\,\frac{(r_1-r_0)^2\,(r_1^3-r_0^3)\,(r_1^2+4\,r_1\,r_0+r_0^2)}{(r_1+r_0)^2}\,\frac{d^4 s_2}{d x^4} = r_0 p_0 - r_1 p_1 - \int_{r_0}^{r_1} s\,d r \quad . \quad . \quad . \quad (89)$$

$$\frac{2}{9}\,\frac{E_1}{E}\,\frac{(r_1^3-r_0^3)\left[(r_1^3-r_0^3)\,(r^2-r_0^2)-(r_1^2-r_0^2)\,(r^3-r_0^3)\right]}{(r_1^2-r_0^2)^2}\,\frac{d^4 s_2}{d x^4} = r^2\,\frac{d^2 s}{d r^2}+3\,r\,\frac{d s}{d r} \quad . \quad . \quad . \quad (90)$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen $\frac{d^4 s_2}{d x^4}$; so kömmt, indem man mit r^2 dividirt,

$$\frac{d^2 s}{d r^2}+\frac{3}{r}\,\frac{d s}{d r} = \frac{12\left[(r_1^3-r_0^3)\,(r^2-r_0^2)-(r_1^2-r_0^2)\,(r^3-r_0^3)\right]}{(r_1-r_0)^4\,(r_1^2+4\,r_1\,r_0+r_0^2)\,r^2}\left\{r_0 p_0 - r_1 p_1 - \int_{r_0}^{r_1} s\,d r\right\} \quad (91)$$

Zur Abkürzung setzen wir jetzt

$$A = \frac{12\left\{r_0 p_0 - r_1 p_1 - \int_{r_0}^{r_1} s\,d r\right\}}{(r_1-r_0)^4\,(r_1^2+4\,r_1\,r_0+r_0^2)} \quad . \quad . \quad . \quad (92)$$

sodaß A aus lauter für r konstante Größen zusammengesetzt ist. Hierdurch wird Gleichung (91)

$$\frac{d^2 s}{d r^2}+\frac{3}{r}\,\frac{d s}{d r} = \frac{A}{r^2}\left[(r_1^3-r_0^3)\,(r^2-r_0^2)-(r_1^2-r_0^2)\,(r^3-r_0^3)\right] \quad (93)$$

Um diese Gleichung zu integriren, setzen wir

$$\frac{d s}{d r} = s'$$

und führen statt s' die neue Variabele v ein, welche zu s' in der Beziehung

$$s' = \frac{v}{r^3}$$

stehen soll, sodaß

$$\frac{d s'}{d r} = \frac{d^2 s}{d r^2} = -\frac{3 v}{r^4}+\frac{1}{r^3}\,\frac{d v}{d r}$$

ist. Hierdurch wird Gl. (93)

$$d v = A\,r\left[(r_1^3-r_0^3)\,(r^2-r_0^2)-(r_1^2-r_0^2)\,(r^3-r_0^3)\right] d r \quad . \quad (94)$$

Digitized by Google

Integrirt man jetzt zwischen den Grenzen $r = r_0$ und $r = r$, welchen für v die Grenzen $v_0 = r_0^3 s_0'$ und $v + r^3 s'$ entsprechen, indem man zugleich für s' wieder seinen Werth $\frac{ds}{dr}$ einführt und nach Gl. (88) $s_0' = -\frac{p_0 + s_0}{r_0}$ setzt; so ergiebt sich nach vorgängiger Division mit r^3

$$\frac{ds}{dr} = -\frac{r_0^2 (p_0 + s_0)}{r^3}$$

$$+\frac{A}{20 r^3}\Big\{5 (r_1^3 - r_0^3)(r^2 - r_0^2)^2 - 2(r_1^2 - r_0^2)\left[2(r^5 - r_0^5) - 5 r_0^3 (r^2 - r_0^2)\right]\Big\} \quad (95)$$

Eine nochmalige Integration zwischen den Grenzen für r von r_0 bis r und zwischen den Grenzen für s von s_0 bis s giebt

$$s = \frac{(r^2 + r_0^2) s_0 - (r^2 - r_0^2) p_0}{2 r^2}$$

$$+\frac{A}{120}\left[\frac{15 (r_1^3 - r_0^3)(r^4 - r_0^4)}{r^2} - 8 (r_1^2 - r_0^2)(r^3 - r_0^3) - \right.$$

$$\left. - \frac{18 r_0^3 (r_1^2 - r_0^2)(r^2 - r_0^2)}{r^2} - 60 r_1^2 r_0^2 (r - r_0) \log \frac{r}{r_0}\right] \quad (96)$$

Die Größe A enthält das Integral $\int_{r_0}^{r_1} s\, dr$. Um dasselbe aus vorstehender Gleichung zu eliminiren, entwickeln wir jenes Integral, indem wir für s den vorstehenden Werth substituiren. Hierdurch erhält man

$$\int_{r_0}^{r_1} s\, dr = -\frac{(r_1 - r_0)^2 p_0 - (r_1^2 - r_0^2) s_0}{2 r_1}$$

$$-\frac{A (r_1 - r_0)}{120 r_1}\Big\{10 r_1 (r_1 - r_0)^3 (r_1^2 + 4 r_1 r_0 + r_0^2) -$$

$$(r_1 + r_0)\left[5 (r_1^2 - r_0^2)(3 r_1^3 + r_0^3) - 2(r_1^5 - r_0^5)\right] + 60 r_1^4 r_0^2 \log \frac{r_1}{r_0}\Big\}$$

Berücksichtigt man diese Beziehung bei Gl. (92); so ergiebt sich

$$A = \frac{60}{r_1 - r_0} \cdot \frac{(r_1^2 + r_0^2) p_0 - 2 r_1^2 p_1 - (r_1^2 - r_0^2) s_0}{(r_1 + r_0)\left[5 (r_1^2 - r_0^2)(3 r_1^3 + r_0^3) - 2 (r_1^5 - r_0^5)\right] - 60 r_1^4 r_0^2 \log \frac{r_1}{r_0}} \quad (97)$$

Durch diesen Werth von A wird das vorhergehende Integral

$$\int_{r_0}^{r_1} s\, dr = r_0 p_0 - r_1 p_1$$

$$- \frac{5 (r_1 - r_0)^3 (r_1^2 + 4 r_1 r_0 + r_0^2)}{(r_1 + r_0)\left[5 (r_1^2 - r_0^2)(3 r_1^3 + r_0^3) - 2 (r_1^5 - r_0^5)\right] - 60 r_1^4 r_0^2 \log \frac{r_1}{r_0}} \times$$

$$\left[(r_1^2 + r_0^2) p_0 - 2 r_1^2 p_1 - (r_1^2 - r_0^2) s_0\right] \quad . \quad . \quad . \quad (98)$$

Digitized by Google

Führt man den Werth von A in Gl. (96) ein; so ergiebt sich der Werth der Spannung s, welcher in irgend einem Abstande r von der Röhrenare herrscht, ausgedrückt durch die Spannung s_0, welche bei derselben Abszisse x in der inneren Röhrenwand stattfindet.

Wir lassen diese Beziehung auf sich beruhen und bemerken nur, dass wenn in Gl. (96), sowie in dem Werthe von A aus (97) $r = r_2$ gesetzt wird, man $s = s_2$, d. h. die ringförmige Spannung in derjenigen Schale erhält, deren Längenfiber in Beziehung auf Längenveränderung neutral bleibt. In diesem Ausdrucke für s_2 ist nur die Größe s_0 von x abhängig: differentiirt man denselben daher für x; so erhält man unter Berücksichtigung des Werthes von r_2 aus (77)

$$\frac{d^4 s_2}{dx^4} = \frac{d^4 s_0}{dx^4} \times$$

$$\frac{(r_1+r_0)\left\{r_2^2\left[13(r_1^3-r_0^3)-15r_1^2r_0^2(r_1-r_0)\right]+\left(13r_1^2r_0^2-\frac{29}{3}r_2^4\right)(r_1^3-r_0^3)\right\}+60r_1^2r_0^2\left[r_0^2(r_1^2-r_0^2)\log\frac{r_2}{r_0}-r_1^2(r_2^2+r_0^2)\log\frac{r_1}{r_0}\right]}{2r_2^2\left\{(r_1+r_0)\left[5(r_1^3-r_0^3)(3r_1^3+r_0^3)-2(r_1^5-r_0^5)\right]-60r_1^4r_0^2\log\frac{r_1}{r_0}\right\}}$$

Substituirt man diesen Werth, zugleich aber auch den aus (98), in die Gl. (89); so ergiebt sich, wenn das Verhältniss $\frac{E}{E_1}$ mit α bezeichnet wird,

$$\frac{(r_1+r_0)\left\{r_2^2\left[13(r_1^5-r_0^5)-15r_1^2r_0^2(r_1-r_0)\right]+\left(13r_1^2r_0^2-\frac{29}{3}r_2^4\right)(r_1^3-r_0^3)\right\}+60r_1^2r_0^2\left[r_2^2(r_1^2-r_0^2)\log\frac{r_2}{r_0}-r_1^2(r_2^2+r_0^2)\log\frac{r_1}{r_0}\right]}{240\,\alpha\,(r_1+r_0)\,(r_1^3-r_0^3)}\frac{d^4 s_0}{dx^4}=$$

$$\frac{(r_1^2+r_0^2)\,p_0-2r_1^2p_1}{r_1^2-r_0^2}-s_0 \qquad . \quad . \quad . \quad . \quad (99)$$

Bezeichnen wir jetzt zur Abkürzung mit a die vierte Wurzel aus dem Ausdrucke

$$\frac{60\,\alpha\,(r_1+r_0)\,(r_1^3-r_0^3)}{(r_1+r_0)\left\{r_2^2\left[13(r_1^5-r_0^5)-15r_1^2r_0^2(r_1-r_0)\right]+\left(13r_1^2r_0^2-\frac{29}{3}r_2^4\right)(r_1^3-r_0^3)\right\}+60r_1^2r_0^2\left[r_2^2(r_1^2-r_0^2)\log\frac{r_2}{r_0}-r_1^2(r_2^2+r_0^2)\log\frac{r_1}{r_0}\right]}$$

so nimmt Gl. (99) die Gestalt an

$$\frac{d^4 s_0}{dx^4} = 4a^4\left[\frac{(r_1^2+r_0^2)\,p_0-2r_1^2p_1}{r_1^2-r_0^2}-s_0\right] \qquad . \quad . \quad . \quad . \quad (100)$$

Digitized by Google

Die Natur dieſer Formel, hinſichtlich der Abhängigkeit zwiſchen den Grundgrößen s_0 und x iſt dieſelbe wie die der Gl. (47). Setzt man $r_1 = r_0 + b$; ſo muſſ Gl. (99) mit (45) ganz identiſch werden, ſobald die Wanddicke b als ſehr klein gedacht wird; es muſſ alſo dann a den Werth $\sqrt[4]{\frac{3a}{r^2 b^2}}$ annehmen. Von dieſer Übereinſtimmung überzeugt man ſich, wenn man den Zähler auf der rechten Seite der Gl. (99) nach Potenzen von b entwickelt. Es iſt aber nothwendig, dieſe Entwicklung bis zu den Gliedern fortzuſetzen, welche in die dritte Potenz von b multiplizirt ſind, weil die in die erſte und auch die in die zweite Potenz von b multiplizirten Glieder für ſich gleich null werden.

Die Gl. (100) iſt hiernach ebenſo zu behandeln wie Gl. (47), und man erkennt, daſſ s_0 dieſelbe allgemeine Form wie s in Gl. (49), nämlich die Form

$$s_0 = \frac{(r_1^2 + r_0^2)\, p_0 - 2 r_1^2 p_1}{r_1^2 - r_0^2} - \left(c_1 e^{w_1 x} + c_2 e^{w_2 x} + c_3 e^{w_3 x} + c_4 e^{w_4 x}\right) \quad (101)$$

annehmen wird, worin w_1, w_2, w_3, w_4 die vier Werthe von $a\sqrt{2}\sqrt[4]{-1}$ darſtellen.

Spezieller Fall einer an dem vorderen Ende geſchloſſenen Röhre.

Wir beſchränken uns darauf, die Konſtanten c_1, c_2, c_3, c_4 für den Fall zu ermitteln, wo die Röhre an dem vorderen Ende geſchloſſen, am hinteren Ende aber offen iſt. Den Verſchluſſ am vorderen Ende ſetzen wir ſo voraus, daſſ für $x = 0$ der Radius r_0 unverändert, alſo die Spannung $s_0 = 0$ bleibt und daſſ zugleich die Tangente an der Kurve des Längenſchnittes daſelbſt parallel zur Röhrenare bleibt, alſo tang $\varphi_0 = 0$ iſt.

Die erſte für dieſen Fall geltende Bedingung, daſſ für $x = 0$ auch $s_0 = 0$ ſei, giebt

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = \frac{(r_1^2 + r_0^2)\, p_0 - 2 r_1^2 p_1}{r_1^2 - r_0^2} \quad . \; . \quad (102)$$

Die zweite Bedingung, wonach für $x = 0$ auch tang φ_0, mithin $\frac{d s_0}{d x} = 0$ ſein muſſ, führt zu der Bedingung

$$c_1 w_1 + c_2 w_2 + c_3 w_3 + c_4 w_4 = 0 \quad . \; . \; . \quad (103)$$

Die dritte Bedingung, daſſ am hinteren Endpunkte für $x = l$ das Biegungsmoment, alſo auch $\frac{d^2 s_0}{d x^2} = 0$ ſei, giebt,

$$c_1 w_1^2 e^{w_1 l} + c_2 w_2^2 e^{w_2 l} + c_3 w_3^2 e^{w_3 l} + c_4 w_4^2 e^{w_4 l} = 0 \quad (104)$$

Digitized by Google

Als vierte Bedingung haben wir die Gleichung (83), welche für $Q_1 = 0$ und $t'' = 0$ gelten muss. In dieser Gleichung setzen wir zuerst $\frac{d^3 \varrho_2}{dx^3} = \frac{r_2}{E} \frac{d^3 s_2}{dx^3}$. Hierauf substituiren wir für $\frac{d^3 s_0}{dx^3}$ seinen Werth in $\frac{d^3 s_0}{dx^3}$, welcher mit demselben Faktor behaftet ist, wie der Werth von $\frac{d^4 s_0}{dx^4}$ in der vor Gl. (99) notirten Beziehung. Alsdann bestimmen wir $\frac{d^3 s_0}{dx^3}$ durch dreimalige Differentiation des Ausdruckes (101). Endlich führen wir statt $\int_{r_0}^{r_1} s\,dr$ den Werth aus (98) ein, indem wir für s_0 den Ausdruck (101) setzen und berechnen $\int_x^1 dx \int_{r_0}^{r_1} s\,dr$. Hierdurch vereinfacht sich Gl. (83) so, dass wenn man schließlich $x = 0$ setzt, wofür jene Gleichung offenbar ebenfalls gelten muss, die Beziehung

$$c_1 w_1{}^3 e^{w_1 l} + c_2 w_2{}^3 e^{w_2 l} + c_3 w_3{}^3 e^{w_3 l} + c_4 w_4{}^3 e^{w_4 l} = 0 \qquad (105)$$

übrig bleibt.

Die Gleichungen (102), (103), (104), (105) stehen jetzt resp. an der Stelle der früheren Gleichungen (54), (61), (56), (57), womit sie bis auf das bekannte Glied der korrespondirenden Gleichungen (102) und (54) genau übereinstimmen.

Die Auflösung unserer jetzigen Gleichungen liefert daher Ausdrücke, welche mit denen in Gl. (62) bis (66) ganz identisch sind, sobald man den in jenen Gleichungen erscheinenden Faktor $\frac{r\,q}{b}$ durch

$$\frac{(r_1{}^2 + r_0{}^2)\,p_0 - 2\,r_1{}^2\,p_1}{r_1{}^2 - r_0{}^2}$$

ersetzt und unter a den jetzt gültigen, bei Gl. (100) angekündigten Werth versteht.

Wie $\frac{r\,q}{b}$ bei Röhren mit sehr dünnen Wänden die Spannung darstellt, welche entsteht, wenn beide Enden der Röhre offen sind; so bezeichnet

$$\frac{(r_1{}^2 + r_0{}^2)\,p_0 - 2\,r_1{}^2\,p_1}{r_1{}^2 - r_0{}^2}$$

nach Gl. (21) bei Röhren von beliebiger Wanddicke die unter denselben Umständen in der inneren Wandfläche entstehende Spannung.

Bei Röhren von genügender Länge wird also die Spannung s_0 in der inneren Wandfläche abwechselnd den oben bezeichneten für Röhren mit zwei offenen Enden gültigen Mittelwerth abwechselnd über- und unterschreiten. Der Verschluss bedingt also auch bei Röhren von beliebiger Wanddicke keine Stärkung, sondern eine Schwächung der Röhre, und hieraus folgt, dass das äußerste Maß,

Digitized by Google

welches der innere Druck p_0 bei Röhren mit freien Öffnungen in keinem Falle überschreiten darf und welches der absoluten Festigkeit des Materials gleich ist, auch in einer Röhre mit geschlossenen Enden nicht überschritten, ja nicht einmal erreicht werden darf.

Hierbei ist, wie es in der Praxis fast immer der Fall sein wird, vorausgesetzt, dass der äußere Druck p_1 sehr klein sei. Wäre derselbe sehr groß; so könnte allerdings, wie schon im ersten Abschnitte dieser Abhandlung erwähnt ist, der innere Druck p_0 die absolute Festigkeit überschreiten, wodurch sich jedoch die eben erläuterten allgemeinen Beziehungen zwischen den Röhren mit offenen und mit geschlossenen Enden keineswegs ändern würden.

Wir bemerken noch, dass wenn man sich eine Röhre mit offenen Enden in eine absolut harte Masse gesteckt oder auf ihre ganze Länge mit einem absolut festen Bande umgeben denkt, sodass der äußere Umfang sich gar nicht erweitern kann und die Spannung s_1 in demselben gleich null bleiben muss, die Röhre offenbar in der wirksamsten Weise geschützt sein würde. Gleichwohl kann dieselbe, wenn ihre Wanddicke einigermaßen beträchtlich ist, doch nur eine mäßige Steigerung des inneren Druckes p_0 über die absolute Festigkeit hinaus vertragen.

Der vorstehende Fall gehört dem im ersten Abschnitte untersuchten an. Der Druck p_1 der umgebenden Masse, welcher die Vergrößerung des äußeren Radius r_1 verhindern soll, findet sich nämlich aus Gl. (26), indem man darin $r = r_1$, $s = s_1 = 0$ setzt. Derselbe ist

$$p_1 = \frac{2\,r_0^2}{r_1^2 + r_0^2}\,p_0$$

Substituirt man diesen Werth in (21); so findet sich für die Spannung in der inneren Röhrenwand

$$s_0 = \frac{r_1^2 - r_0^2}{r_1^2 + r_0^2}\,p_0$$

Soll dieselbe die absolute Festigkeit f nicht überschreiten; so darf der innere Druck sich nicht über den Grenzwerth

$$p_0 = \frac{r_1^2 + r_0^2}{r_1^2 - r_0^2}\,f$$

erheben.

5. Röhren

mit geschlossenen Enden, betrachtet unter einer vereinfachenden Hypothese.

Wir haben im ersten Abschnitte gesehen, dass die Hypothese, dass das Material der Röhrenwand in der Richtung des Radius keine Kompression erleide oder dass das Volum der Röhrenwand stets dasselbe bleibe, Formeln erzeugt, welche bei Röhren mit zwei offenen Enden die erforderliche Wanddicke genau genug darstellen,

Digitized by Google

insofern das Verhältniss der Wanddicke $b = r_1 - r_0$ zum inneren Radius r_0 nicht den Werth $\frac{1}{2}$ übersteigt. Da hierunter die Mehrzahl der praktischen Fälle begriffen ist; so wollen wir diese Hypothese, da sie eine wesentliche Vereinfachung der Formeln bewirkt, auch für Röhren mit geschlossenen Enden ausführen.

Da bei dieser Annahme ϱ als eine von r unabhängige Größe erscheint; so ist $\frac{d\varrho}{dr} = 0$, also, wenn man Gl. (81) für r differentiirt,

$$r \frac{ds}{dr} + s = 0$$

$$\frac{ds}{s} = -\frac{dr}{r}$$

Hieraus folgt durch Integration zwischen den Grenzen s_0, s und r_0, r

$$\log \frac{s}{s_0} = \log \frac{r_0}{r}$$

$$\frac{s}{s_0} = \frac{r_0}{r}$$

$$s = \frac{r_0 s_0}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (106)$$

Demnach ist

$$\int_{r_0}^{r_1} s\, dr = r_0 s_0 \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{r} = r_0 s_0 \log \frac{r_1}{r_0} \quad . \quad . \quad . \quad (107)$$

Nach Gl. (81) ist für die neutrale Fiber

$$\varrho_2 = \frac{r_2 s_2}{E}$$

und da nach (106) $s_2 = \frac{r_0 s_0}{r_2}$ ist,

$$\varrho_2 = \frac{r_0 s_0}{E} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (108)$$

folglich auch

$$\frac{d\varrho_2}{dx} = \frac{r_0}{E} \frac{ds_0}{dx} \qquad \frac{d^4\varrho_2}{dx^4} = \frac{r_0}{E} \frac{d^4 s_0}{dx^4}$$

Durch alle diese Werthe wird Gl. (84)

$$\frac{r_0 (r_1 - r_0)^3 (r_1^3 + 4 r_1 r_0 + r_0^3)}{36 \alpha (r_1 + r_0)} \frac{d^4 s_0}{dx^4} = r_0 p_0 - r_1 p_1 - r_0 s_0 \log \frac{r_1}{r_0} \quad (109)$$

Digitized by Google

oder wenn man

$$a = \sqrt[4]{\frac{9\,\alpha\,(r_1 + r_0)\,\log\frac{r_1}{r_0}}{(r_1 - r_0)^3\,(r_1^2 + 4\,r_1\,r_0 + r_0^2)}} \quad \ldots \quad (110)$$

setzt,

$$\frac{d^4 s_0}{d x^4} = 4\,a^4 \left(\frac{r_0\,p_0 - r_1\,p_1}{r_0\,\log\frac{r_1}{r_0}} - s_0 \right) \quad \ldots \quad (111)$$

Diese Gleichung wird ebenso wie Gl. (17) behandelt.

Für den Fall, wo das eine Ende der Röhre dergestalt geschlossen ist, daß daselbst die Spannung s_0 in der inneren Röhrenwand null und die Tangente des Längenschnittes parallel zur Röhrenare ist, gilt Gl. (83) für $Q_1 = 0$, $t'' = 0$ und führt alsdann in der schon mehrfach erläuterten Weise zu der Bedingungsgleichung (105). Da außerdem die drei Gleichungen (102), (103), (104) mit dem Unterschiede Gültigkeit haben, daß in Gl. (102) das bekannte Glied den Werth $\frac{r_0\,p_0 - r_1\,p_1}{r_0\,\log\frac{r_1}{r_0}}$ annimmt; so erkennt man, daß die gesuchten Spannungsverhältnisse auch bei der zu Grunde gelegten Hypothese durch die Gleichungen (62) bis (66) ausgedrückt werden, wenn man den dortigen Faktor $\frac{r\,q}{b}$ durch die Größe

$$\frac{r_0\,p_0 - r_1\,p_1}{r_0\,\log\frac{r_1}{r_0}}$$

ersetzt, welche hier wie dort die Spannung der inneren Wandfläche in einer Röhre mit zwei offenen Enden darstellt.

6. Schlußbetrachtungen

über die vollständige Berücksichtigung aller Molekularkräfte.

Bei den früheren Untersuchungen haben wir die Abscherungskraft t, welche die ringförmigen Längenelemente der Röhre in radialer Richtung aufeinander zu verschieben strebt, zwar als Widerstandskraft mit in Rechnung gestellt: unter der Voraussetzung jedoch, daß die dadurch bedingte Formveränderung unerheblich sei, haben wir die letztere außer Acht gelassen, was der Annahme gleich kommt, daß die natürliche Widerstandsfähigkeit des Materials gegen Abscherung ungemein groß sei. Die auffallenden Eigenschaften der hieraus resultirenden Formeln, welche lehren, daß ein Verschluß der Röhre eher eine Schwächung, als eine Stärkung herbeiführt, und daß die Spannung s mit der Abszisse über und unter den einer

Digitized by Google

Röhre mit freien Öffnungen entsprechenden Mittelwerth oszillirt, nöthigen uns, auch der durch die Abscherungskraft bedingten Formveränderung Rechnung zu tragen.

In meiner Schrift „Über die Festigkeit gegen das Zerknicken", §. 29, habe ich das Prinzip erläutert, nach welchem die durch die Abscherungskraft bewirkte Formveränderung vor sich geht. Dasselbe besteht in Folgendem.

Wenn b g (Fig. 11) die natürliche Längenrichtung eines Prismas ist, und in dem Querschnitte a b, sowie in dem unendlich benachbarten Querschnitte c d wirkt in entgegengesetzten Richtungen die Abscherungskraft t pro Flächeneinheit; so nimmt die Längenare des Prismas die Richtung b h an, deren Neigungswinkel $h\,b\,g = \psi$ gegen die ursprüngliche Richtung durch die Formel

$$\text{tang}\,\psi = \frac{t}{T} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (112)$$

bedingt ist, worin T den Torsionsmodel pro Flächeneinheit bezeichnet.

Jetzt sei a b g f (Fig. 12) ein im Kreise vom Radius a e = R' gebogener Stab. Wird das erste Längenelement a c' d' b, welches den Zentrumswinkel $a\,e\,c' = \vartheta$, also die Länge a c' = R'ϑ hat, um den Winkel $a'a\,c' = \psi$ verschoben; so rückt der Punkt c' um c'a' = R'ϑ tang ψ in der Richtung des Radius c' e e' fort, und ebenso verrückt sich der Mittelpunkt für den folgenden kreisförmigen Theil c' f des Stabes in der Richtung c' e e' um das Stück e e' = c'a' = R'ϑ tang ψ nach e'. Wird in derselben Weise das zweite Element a' c'' um denselben Winkel $a''a'c'' = \psi$ verschoben; so rückt der Punkt c'' um dieselbe Entfernung auf dem Radius c'' e' e'' fort und der Mittelpunkt für den folgenden Theil des kreisförmig gebogenen Stabes gelangt auf dieser Linie nach e'', sodass auch e'e'' = c''a'' = c'a' = R'ϑ tang ψ ist.

Man erkennt leicht, dass die Punkte e, e', e'' einen Kreis bilden, an welchen die Radien a e, a' e', a'' e'' Tangenten sind. Für den Radius h e jenes Kreises e e' e'' findet man leicht den Werth $R'' = \frac{e\,e'}{\vartheta} = R'\,\text{tang}\,\psi$.

Außerdem erkennt man, dass auch die Kurve a a' a'', welche der verschobene Stab annimmt, ein Kreis ist, dessen Mittelpunkt h im Mittelpunkte des Kreises e e' e'' liegt und dessen Radius h a = R den Werth

$$R = \sqrt{R'^2 + R''^2} = \frac{R'}{\cos\psi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (113)$$

hat.

Umgekehrt findet man also den Radius R' des ursprünglichen Kreises a f aus dem Radius R des Kreises a a' a'' durch die Formel

$$R' = R\cos\psi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (114)$$

Digitized by Google

Ist nun a f die Krümmung, welche der Stab vermöge der in den normalen Querschnitten a b wirkenden Elastizitätskräfte annehmen würde, und a a'' die durch die Abscherungskräfte bewirkte Abweichung; so ist tang $\psi = \frac{t}{T}$, und man kann, da der Winkel ψ als sehr klein vorausgesetzt wird, $\psi = \frac{t}{T}$ und $\cos \psi = 1 - \frac{t^2}{2T^2}$, folglich

$$R' = R\left(1 - \frac{t^2}{2T^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (115)$$

und

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R}\left(1 + \frac{t^2}{2T^2}\right) \quad . \quad . \quad (116)$$

setzen.

R ist für irgend einen Punkt des unter variabelen Kräften gebogenen Stabes der Krümmungshalbmesser, für dessen umgekehrten Werth wir bekanntlich

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2\varrho}{dx^2}$$

setzen können.

R' ist dagegen derjenige Radius, welcher die Stelle des in den Formeln der Biegungstheorie vorkommenden Krümmungshalbmessers vertritt. Für den umgekehrten Werth desselben haben wir also

$$\frac{1}{R'} = \left(1 + \frac{t^2}{2T^2}\right)\frac{d^2\varrho}{dx^2} \quad . \quad . \quad (117)$$

Hiernach bleiben die Grundformeln des vierten Abschnittes gültig, indem wir $\frac{1}{R}$ mit $\frac{1}{R'}$ oder $\frac{d^2\varrho}{dx^2}$ mit $\left(1 + \frac{t^2}{2T^2}\right)\frac{d^2\varrho}{dx^2}$ vertauschen.

Erwägt man, dass die Kraft t höchstens den Werth der Abscherungsfestigkeit, welche nahezu gleich der absoluten Festigkeit ist, erreichen kann, indem bei einer Überschreitung dieses Werthes Trennung der ringförmigen Elemente erfolgen müsste, und dass der Torsionsmodel T etwa $^2/_5$ des Elastizitätsmodels beträgt; so erscheint $\frac{t^2}{2T^2}$, wie veränderlich diese Größe auch sei, doch stets als ein so äußerst kleiner Werth, dass derselbe gegen die Einheit vernachlässigt werden kann. Hierdurch wird aber R' = R und die früheren Formeln bleiben genau dieselben.

Man erkennt hieraus, dass die Vernachlässigung der durch die Abscherungskraft t bedingten Formveränderung der Röhre und des damit im Zusammenhange

Digitized by Google

stehenden Einflusses auf die Größe der Spannung s vollkommen gerechtfertigt war, und daß auch die strengste Berücksichtigung jener Molekularwirkung die gefundenen Resultate nicht wesentlich alterirt.

Ein zweiter Gegenstand, welcher vielleicht eine Korrektur erforderlich machen könnte, ist die Lage der neutralen Fiber im Querschnitte eines aus der Röhrenwand geschnittenen Streifens von dem sehr kleinen Zentrumswinkel 2ω.

Wenn alle auf einen solchen Streifen angebrachten Kräfte normal auf seiner Länge stehen und die Biegung desselben überall nur schwach ist; so muß die neutrale Fiber ganz nahe durch den Schwerpunkt des Querschnittes gehen. Diese beiden Voraussetzungen verwirklichen sich nun allerdings in dem gegebenen Systeme bis auf die innere Pressung p_0, welche wegen der Krümmung der Röhrenwand auch eine Komponente in paralleler Richtung zur Röhrenare erzeugt. Es fragt sich, ob diese Komponente im Vergleich zu den in derselben Richtung wirkenden Elastizitätskräften nicht so groß werden kann, um eine erhebliche Verrückung der neutralen Fiber aus dem Schwerpunkte des Querschnittes und dadurch eine namhafte Änderung der früheren Formeln zu bewirken.

Folgende Betrachtung genügt, um die Überzeugung zu gewinnen, daß die letztere Befürchtung nicht eintreten kann. Die in Rede stehende Komponente ist gleich dem Drucke der inneren Flüssigkeit auf die Projektion der Ringfläche, welche die Erweiterung der Röhre darstellt. Da die früher mit ϱ bezeichnete Erweiterung eine äußerst kleine Größe in Beziehung zum Radius r und noch weit mehr in Beziehung zur Länge der Röhre ist; so ist jene Komponente ebenfalls ungemein klein gegen den inneren Druck selbst, welcher sich von unten gegen den früher betrachteten Wandstreifen äußert. Noch kleiner wird aber das Verhältniß, in welchem das Moment jener Komponente für irgend einen Punkt des Querschnittes als Drehungspunkt zu dem Momente des inneren Druckes für den Anfangspunkt des betrachteten Streifens als Drehungspunkt steht. Das erstere Moment kann gegen das letztere ohne Frage vernachlässigt werden.

Nun sind die im vierten Abschnitte aufgestellten Gleichgewichtsbedingungen entweder Summengleichungen für die auf der Röhrenare normal stehenden Kräfte, wie die Gleichungen (75), (76), (79) oder Momentengleichungen wie (78), (80). Die ersteren erleiden durch die axial gerichtete Komponente gar keine Änderung. Die letzteren würden jedoch in der Weise zu korrigiren sein, daß man auf der rechten Seite das Moment jener Komponente hinzufügte und auf der linken Seite berücksichtigte, daß die neutrale Fiber nicht mehr im Schwerpunkte, sondern in einem Abstande z von demselben läge.

Das Moment der fraglichen Komponente auf der rechten Seite verschwindet aber gegen das daselbst stehende Moment des inneren Druckes, und was die Verrückung der neutralen Fiber betrifft; so kömmt die Berücksichtigung derselben auf

Digitized by Google

die Hinzufügung eines Momentes hinaus, dessen Hebelarm z und dessen Kraft ein Theil der in Rede stehenden Komponente ist. Dieses Moment kann ebenso, wie das zuerst genannte Moment der fraglichen Komponente, gegen das auf der rechten Seite stehende Moment des inneren Druckes vernachlässigt werden, und überhaupt ist klar, dass wenn das Moment der Komponente als die wirkende Ursache gegen andere Kräfte verschwindet, die Wirkung selbst, welche hier in der Verrückung der neutralen Fiber liegt, ebenfalls verschwinden muss.

Hiernach vermögen auch die etwa entstehenden axialen Kräfte die früher erörterten allgemeinen Eigenschaften der Röhren mit geschlossenen Enden nicht zu ändern.

Alle in der vorstehenden Theorie zugelassenen Abkürzungen und Auslassungen erscheinen also als relativ unbedeutend und ohne namhaften Einfluss auf das Endresultat. Es ist mir nicht gelungen, außer den zur Sprache gebrachten noch andere Molekularwirkungen zu entdecken, von welchen sich eine wesentliche Modifikation der obigen Formeln erwarten ließe. Unter solchen Umständen muss ich die gefundenen Ergebnisse, welche sich in dem Resultate konzentriren, *dass Bänder und Verschlüsse an Röhren nicht zur Erhöhung der Festigkeit beitragen*, so auffallend dieselben auch erscheinen, für zuverlässig und in der Natur der Dinge begründet halten.

Immerhin erscheint es wünschenswerth, jene Ergebnisse durch praktische Versuche direkt zu bestätigen. Die Anwendung von Röhren mit dicken Wänden, welche bedeutende Pressungen zu ihrer Sprengung erfordern, würde die Versuche einigermaßen kostspielig machen: eine Bestätigung des Hauptresultates, woraus zugleich eine Bewahrheitung des in den Formeln liegenden Grundprinzipes hervorgehen würde, ließe sich leichter durch Röhren mit *dünnen* Wänden erzielen, indem man dieselben *gar keinem inneren Drucke* aussetzte, sondern nur an einer Stelle entweder *auftriebe* oder *zusammenschnürte*.

Würde z. B. die Röhre A B C D (Fig. 13) mit zwei offenen Enden in der Mitte E F bis auf das Kaliber G H eingeschnürt; so müsste sie die mit den ausgezogenen Linien dargestellte Wellenform annehmen, vermöge welcher ihr Kaliber abwechselnd größer und kleiner wird, als das ursprüngliche, durch punktirte Linien dargestellte.

Auf diesen Fall sind die Formeln des zweiten Falles im dritten Abschnitte unter folgenden Modifikationen anwendbar.

Der Überschuss ϱ des inneren Druckes über den äußeren ist *null*. Bezeichnet man die *Erweiterung* in der Mitte mit ϱ', sodass $\varrho' = EG = FH$ eine *negative* Größe ist, wenn die Röhre in der Mitte nicht erweitert, sondern *verengt* wird; so ist die Spannung an dieser Stelle nach Gl. (42) $s = \frac{E\varrho'}{r}$.

Digitized by Google

Demgemäß ist, indem der Anfangspunkt der Abszissen in den mittleren Querschnitt EF und EC = l genommen wird, in Gl. (49) das Glied $\frac{r\,q}{b} = 0$, in Gl. (54) aber die rechte Seite $= -\frac{E\varrho'}{r}$ zu setzen, während die drei Gleichungen (56), (57), (61) ungeändert bleiben.

Das Resultat ist alsdann durch Gl. (62) dargestellt, indem man den Faktor $\frac{r\,q}{b}$ vor der Klammer mit $-\frac{E\varrho'}{r}$ vertauscht und in der Klammer das Glied 1 streicht.

Behuf praktischer Versuche ist es vorzuziehen, statt der Spannungen s die Erweiterungen oder Verengungen ϱ zu beobachten. Substituiren wir also auf der linken Seite von Gl. (62) für s den gleichnamigen Werth $\frac{E\varrho}{r}$; so ergiebt sich die Erweiterung ϱ der Röhre (d. h. die Vergrößerung des Radius) für irgend eine von der Mitte EF gemessene Abszisse x durch die Formel

$\varrho = -\varrho'$ multiplizirt mit dem Ausdrucke in der Klammer von Gl. (62), nachdem darin das Glied 1 gestrichen ist.

Nach Gl. (66) wird, wenn die Röhre in der Mitte verengt, also $-\varrho'$ der absolute Werth der Größe EG ist, die stärkste Erweiterung der Röhre in der Nähe der Mitte etwa $^1/_{56}$ der Einengung EG, also eine sehr kleine Größe sein, welche eine subtile Messung erfordert. Wäre die Röhre in der Mitte erweitert, also $-\varrho'$ negativ; so würde die stärkste Einengung in der Nähe der Mitte etwa $^1/_{56}$ der daselbst stattfindenden Erweiterung sein.

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 1

Fig. 2

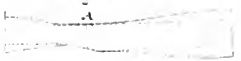

Fig. 3

Fig. 4.

Fig. 5

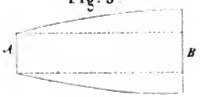

Fig. 6

Fig. 7.

Fig. 8

Fig. 9

Fig. 10

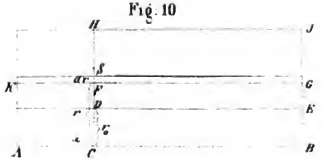

Fig. 12

Fig. 11.

Fig. 13

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google